量子力学 I 中間試験問題 (H29, 5/29) 担当：栗本

- **以下の 大問 1,2 に必答し，残りの大問 3, 4 から 1 つを選んで解答せよ．**
- **全ての解答用紙に氏名と番号を記入すること。**
- **解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせ，他人に読んでもらうことを意識して解答を記すこと．結果だけの解答、途中の論理や計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする。**

1. **(必答問題)** 以下の問いに答えよ．
計算には，プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ [J s]，$\hbar = h/(2\pi) = 1.1 \times 10^{-34}$ [J s]，光速 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s]，電子の質量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ [kg]，1 [eV] $= 1.6 \times 10^{-19}$ [J]，1 [Å] $= 1.0 \times 10^{-10}$ [m] を用いよ．(各 10 点，計 30 点)

   (a) ある X 線 (高エネルギーの電磁波) の波長は 3.3×10^{-10} m である．この X 線を構成する光量子 (光子) のエネルギーと運動量を **有効数字 1 桁** で求めよ．ただし，エネルギーは **[eV] を単位とし**，運動量は SI 単位系 (MKSA 単位系) で求めること．(**注意!! 光子の質量は 0 である．**)

   (b) 速さ 1.1×10^6[m/s] で運動している電子の物質波の波長を **[Å] を単位として 有効数字 1 桁** で求めよ．

   (c) 1 次元で考え，長さが 1.1×10^{-10} [m] の領域内に電子を閉じ込めたとする．この場合の電子の位置の不定性 Δx を $\Delta x \leq 1.1 \times 10^{-10}$ [m] とするとき，不確定性原理を用いて電子の位置の運動量の不定性 Δp に課せられる条件を求め，そこから電子の運動エネルギーの最低値 $\dfrac{(\Delta p)^2}{2m}$ を **[eV] を単位として有効数字 1 桁** で求めよ．

2. **(必答問題)** 1 次元で考えて，以下の問いに答えよ．((a), (b) – 各 20 点．計 40 点)

   (a) 波動関数が以下のように与えられている場合，$\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{3L}{4}$ の領域内でこの粒子を観測する確率を求めよ．

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ または } L < x \text{ のとき; } L \text{ は正の実数}) \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi x}{L}) & (0 \leq x \leq L \text{ のとき．}) \end{cases}$$

   (b) 質量 m の粒子の波動関数が以下のように与えられている場合，運動エネルギーの期待値を求めよ．

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ または } L < x \text{ のとき}) \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sin(\frac{\pi x}{L}) + \sin(\frac{2\pi x}{L})\right] & (0 \leq x \leq L \text{ のとき}) \end{cases}$$

3. 角運動量演算子を $L_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y$ ，$L_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z$ ，$L_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ で定義する．
ここで，$\hat{p}_k$ $(k = x, y, z)$ は運動量演算子である。以下の問いに答えよ．(30 点)

   (a) $[AB\,,\,C] = A[B\,,\,C] + [A\,,\,C]B$ を示せ．(5 点)

   (b) $[L_z\,,\,L_x] = i\hbar L_y$ を示せ．(10 点)

   (c) $[L_z\,,\,L_x + iL_y] = \hbar(L_x + iL_y)$ を示せ．(10 点)

   (d) 演算子 L_z の固有値 m の固有状態を $|m\rangle$ とするとき，
$L_z(L_x + iL_y)|m\rangle = (m + \hbar)(L_x + iL_y)|m\rangle$ を示せ．(5 点)

4. 波動関数が $|\psi(t)\rangle = a(t)|A\rangle + b(t)|B\rangle$ で与えられていて．$\langle A|A\rangle = \langle B|B\rangle = 1$，$\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle = 0$ とする．ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ の作用が，$\hat{H}|A\rangle = \hbar\omega|B\rangle$，$\hat{H}|B\rangle = \hbar\omega|A\rangle$ (ω は正の実数定数) である場合，時間に依存するシューレーディンガー方程式を用いて $a(t)$ と $b(t)$ に対する微分方程式を求めよ．また，初期条件 $a(0) = 0$，$b(0) = 1$ の下で求めた微分方程式を解き，$|a(t)|^2 = 1$ となる時刻 t を求めよ．(30 点)

以上

解答例

1. (a) エネルギーを E，運動量を p，波長を λ，振動数を ν として

$$
\begin{aligned}
E &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.6\times10^{-34}\times3.0\times10^{8}}{3.3\times10^{-10}} = 6.0\times10^{-16}\ [\mathrm{J}] \\
&\Rightarrow \frac{6.0\times10^{-16}}{1.6\times10^{-19}} \simeq 4\times10^{3}\ [\mathrm{eV}] \\
p &= \frac{E}{c} = \frac{6.0\times10^{-16}}{3.0\times10^{8}} = 2\times10^{-24}\ [\mathrm{kg\ m/s}]
\end{aligned}
$$

(b) 電子の質量を m，運動量を p，物質波の波長を λ として

$$
\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times1.1\times10^{6}} = \frac{6.0}{9.1}\times10^{-9} \simeq 7\times10^{-10}\ [\mathrm{m}] = 7\ [\text{Å}]
$$

(c) 不確定性原理 $\Delta x\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ より，$\Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta x}$．これを用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{(\Delta p)^2}{2m} &\geq \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2 = \frac{1}{2\times9.1\times10^{-31}}\left(\frac{1.1\times10^{-34}}{2\times1.1\times10^{-10}}\right)^2 = \frac{1.0\times10^{-48}}{8\times9.1\times10^{-31}}\ [\mathrm{J}] \\
&= \frac{1.0\times10^{-17}}{72.8\times1.6\times10^{-19}}\ [\mathrm{eV}] \simeq 1\ [\mathrm{eV}]\ \text{または}\ 0.9\ [\mathrm{eV}]
\end{aligned}
$$

2. (a) 粒子を $L/4 \leq |x| \leq 3L/4$ の領域で観測する確率は

$$
\begin{aligned}
\int_{L/4}^{3L/4}\psi^*\psi\,dx &= \int_{L/4}^{3L/4}\frac{2}{L}\sin^2(\frac{\pi x}{L})\,dx = \int_{L/4}^{3L/4}\frac{2}{L}\frac{1}{2}\left\{1-\cos(\frac{2\pi x}{L})\right\}\,dx \\
&= \frac{1}{L}\left[x-\frac{L}{2\pi}\sin(\frac{2\pi x}{L})\right]_{L/4}^{3L/4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\{\sin(\frac{3\pi}{2})-\sin(\frac{\pi}{2})\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\langle\frac{(\hat{p})^2}{2m}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(-\frac{\hbar^2}{2m})\frac{d^2}{dx^2}\psi\,dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L\left[\sin(\frac{\pi x}{L})+\sin(\frac{2\pi x}{L})\right](-\frac{\hbar^2}{2m})\frac{d^2}{dx^2}\left[\sin(\frac{\pi x}{L})+\sin(\frac{2\pi x}{L})\right]\,dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2mL}\int_0^L\left[\sin(\frac{\pi x}{L})+\sin(\frac{2\pi x}{L})\right]\left[(\frac{\pi}{L})^2\sin(\frac{\pi x}{L})+(\frac{2\pi}{L})^2\sin(\frac{2\pi x}{L})\right]\,dx \\
&= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^3}\int_0^L\left\{\sin^2(\frac{\pi x}{L})+4\sin^2(\frac{2\pi x}{L})+5\sin(\frac{\pi x}{L})\sin(\frac{2\pi x}{L})\right\}\,dx \\
&= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^3}(\frac{L}{2}+\frac{4L}{2}+0) = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}
\end{aligned}
$$

3. (a)

$$
[AB,C] = ABC-CAB = ABC-ACB+ACB-CAB = A[B,C]+[A,C]B
$$

(b) 位置の演算子同士の交換関係は 0 であること．運動量演算子同士の交換関係は 0 であること．および $[j,\hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ $(j,k=x,y,z)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
[L_z,L_x] &= [x\hat{p}_y-y\hat{p}_x, y\hat{p}_z-z\hat{p}_y] = [x\hat{p}_y,y\hat{p}_z]-[y\hat{p}_x,y\hat{p}_z]-[x\hat{p}_y,z\hat{p}_y]+[y\hat{p}_x,z\hat{p}_y] \\
&= [x\hat{p}_y,y\hat{p}_z]-0-0+[y\hat{p}_x,z\hat{p}_y] \\
&= x[\hat{p}_y,y]\hat{p}_z+\hat{p}_x[y,\hat{p}_y]z = -i\hbar x\hat{p}_z+i\hbar z\hat{p}_x = i\hbar L_y
\end{aligned}
$$

(c) (b) と同様にして

$$\begin{aligned}[L_z, L_y] &= [x\hat{p}_y - y\hat{p}_x, z\hat{p}_x - x\hat{p}_z] = [x\hat{p}_y, z\hat{p}_x] + [y\hat{p}_x, x\hat{p}_z] \\ &= z[x, \hat{p}_x]\hat{p}_y + y[\hat{p}_x, x]\hat{p}_z = i\hbar z\hat{p}_y - i\hbar y\hat{p}_z = -i\hbar L_x\end{aligned}$$

これらを用いて

$$[L_z, L_x + iL_y] = [L_z, L_x] + i[L_z, L_y] = i\hbar L_y + i(-i\hbar)L_x = \hbar(L_x + iL_y)$$

(d) (c) の結果より $L_z(L_x + iL_y) - (L_x + iL_y)L_z = \hbar(L_x + iL_y)$ を用いて

$$\begin{aligned}L_z(L_x + iL_y)|m\rangle &= \{(L_x + iL_y)L_z + \hbar(L_x + iL_y)\}|m\rangle = (L_x + iL_y)m|m\rangle + \hbar(L_x + iL_y)|m\rangle \\ &= (m + \hbar)(L_x + iL_y)|m\rangle\end{aligned}$$

4. シュレーディンガー方程式は

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= \hat{H}|\psi(t)\rangle \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[a(t)|A\rangle + b(t)|B\rangle] &= \hat{H}[a(t)|A\rangle + b(t)|B\rangle] \\ i\hbar[\dot{a}(t)|A\rangle + \dot{b}(t)|B\rangle] &= a(t)\hbar\omega|B\rangle + b(t)\hbar\omega|A\rangle \\ \text{左から } \langle A| \text{ をかけて} & \\ i\hbar[\dot{a}(t)\langle A|A\rangle + \dot{b}(t)\langle A|B\rangle] &= a(t)\hbar\omega\langle A|B\rangle + b(t)\hbar\omega\langle A|A\rangle \\ \text{よって} \quad i\dot{a}(t) &= \omega b(t) \\ \text{4 行上の式に左から } \langle B| \text{ をかけて} & \\ i\hbar[\dot{a}(t)\langle B|A\rangle + \dot{b}(t)\langle B|B\rangle] &= a(t)\hbar\omega\langle B|B\rangle + b(t)\hbar\omega\langle B|A\rangle \\ \text{よって} \quad i\dot{b}(t) &= \omega a(t)\end{aligned}$$

以上から $i\dot{a}(t) = \omega b$,　$i\dot{b}(t) = \omega a$. これらを用いて

$$\ddot{a}(t) = -i\omega\dot{b}(t) = -\omega^2 a(t)\ ,\ \ \ddot{b}(t) = -i\omega\dot{a}(t) = -\omega^2 b(t)$$

一般解は $a(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$, $b(t) = D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)$ である．
初期条件 $a(0) = 0$, $b(0) = 1$ より，$C_1 = 0$, $D_1 = 1$. これを代入してから時間微分すると

$$\dot{a}(t) = \omega C_2\cos(\omega t)\ ,\ \ \dot{b}(t) = -\omega\sin(\omega t) + \omega D_2\cos(\omega t)$$

求めた微分方程式 $i\dot{a}(t) = \omega b(t)$,　$i\dot{b}(t) = \omega a(t)$ に代入して

$$i\omega C_2\cos(\omega t) = \omega\{\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)\}\ ,\ \ i\{-\omega\sin(\omega t) + \omega D_2\cos(\omega t)\} = \omega C_2\sin(\omega t)$$

任意の時刻 t でこれらが成立するには $D_2 = 0$, $C_2 = -i$. よって求める解は

$$a(t) = -i\sin(\omega t)\ ,\ \ b(t) = \cos(\omega t)\ .$$

$|a(t)|^2 = \sin^2(\omega t)$ なので，$|a(t)|^2 = 1$ となる時刻は $t = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}$ (n は整数).