

# 量子力学を学ぶにあたっての最初の注意

**初めのうちは、量子力学を根本から理解しようとしなさいこと!**

- 量子力学がなぜ成立するかを完全に理解している人は(おそらく)いない。
- 量子力学的なミクロ世界での振る舞いと古典物理学的なマクロ世界での観測とを結びつける説明(観測の理論)は完成されていない。
- しかし、我々はミクロな世界を記述するルール(どう計算すればいいか、どう解釈すればいいか)は知っている。

**これから学ぶのは、ミクロな世界を記述するためのルール**

(なぜサッカーは11人でチームを作るのかは知らなくてもサッカーはできる)

## 世界観のシフト

常識の限界 — 所変われば品変わる —

古典物理学(力学, 電磁気学)の破綻

光電効果, 原子スペクトル, コンプトン効果, 固体比熱, 黒体輻射, ...

19世紀までの物理学では説明できない諸現象が存在する ⇒ 新しい物理の考え方が必要

物理で大事なものは観測, 実験の結果を説明できること. 理論に実験を合わせるのではなく, 実験結果に合う理論を作らねばならない. そのためには過去の常識の枠にとらわれず, 柔軟に思考を発展させねばならない. (だからといって, それまで通用していた理論を完全に否定することはない. それぞれの理論の適用範囲をしっかりと認識しておくことが大事.)

### 光電効果

実験事実: 光や紫外線を金属に照射すると, その表面から電子が飛び出すことがある.

- 電子が飛び出すかどうかは, 光の波長によって決まり, 照射量によらない. (ある波長より小さい波長の光を照射すると飛び出すが, それより大きい波長では飛び出さない.)
- 飛び出す電子のエネルギーは照射する光の波長で決まる. 飛び出す電子の個数は照射量に依存する.

電磁気学では, 電磁波(光)のエネルギーは  $\int \frac{1}{2}(\epsilon|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu}|\vec{B}|^2) d^3x$  ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  は電磁波を構成する電場, 磁場) で与えられる. すなわち, 電磁波の振幅(電場, 磁場の大きさ)で決まる.

⇒ たくさん照射すれば電子が金属から飛び出すに必要なエネルギーが与えられるはずだが...

**光量子仮説** (アインシュタイン 1905)

- 光は波としての性質だけでなく, エネルギー  $h\nu$  ( $h$  はプランク定数,  $\nu = c/\lambda$  は振動数), 運動量  $h\nu/c$  を持つ粒子(光量子)の集まりとしての性質も持つ. ⇐ 黒体輻射の説明のためのプランクのエネルギー量子仮説(1900)を応用(古典物理学では受け入れがたい考え)

- 電子は一度に一つの光量子からエネルギーをもらう。(何度も光量子からエネルギーをもらって蓄積できないのか?? ← 原子の構造が関わる(次節))

↓ (光電効果の説明)

電子が金属表面から飛び出すのに必要なエネルギーを  $E_{th}$  とすると  $E_{th} < h\nu = hc/\lambda$  なら飛び出せるが、そうでないと飛び出せない。

光全体のエネルギーは、一定の振動数なら  $Nh\nu$  ( $N$  は光量子の個数)

## 原子スペクトル

実験事実:

- 原子が輻射する光はその原子に固有の一定の振動数のみをとる。

$$\nu = R_Z \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (R_Z \text{ は原子に固有の定数, } n, k \text{ は自然数})$$

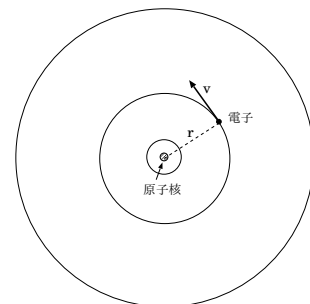
(古典物理学では  $n, m$  のような自然数が現れる離散的な公式は困難)

- ラザフォードの研究により、原子は中心にある原子核とそれを取りまく電子からなる。

(電子が惑星運動のように原子核の回りを運動しているなら、それは加速度運動であり、加速度運動を行う電荷からは電磁波が放出される。その分のエネルギーを失って電子はすぐに原子核へ落ち込んでしまう。)

## 原子模型 (ボーア 1913)

- 原子内での電子は、その角運動量の大きさが  $n\hbar$  ( $n$  は自然数,  $\hbar = h/2\pi$ ) となる軌道上にのみ存在でき、その軌道上にいと電子は電磁波を出さない。  
(古典物理学では説明不可能)
- 電子と光量子とのエネルギーのやりとりは、一つの軌道から別の軌道への遷移の形で起こる。



この仮定に基づき、電子の軌道を半径  $r$  の円にとり計算してみる。電子の質量を  $m$ 、電荷を  $-e$  とし、原子核の電荷を  $Ze$  とする。電子の速さが  $v$  のとき、角運動量の大きさは  $mvr$ 。仮定より

$$mvr = n\hbar$$

一方、電子に働く電気のクーロン力が円運動の向心力になるので、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{n\hbar}{mr} \right)^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3}$$

よって  $r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2n^2}{Ze^2m}$  となり、電子のとりうる軌道の半径は自然数  $n$  に依存して、とびとびの値をとる。このときの電子のエネルギーは、運動エネルギーと位置エネルギーの和で与えられる。

$$E_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2}$$

これから、自然数  $k$  で指定される軌道から自然数  $n$  で指定される軌道へ電子が遷移するには

$$\Delta E = E_m - E_n = \frac{Z^2 e^4 m}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

だけのエネルギーが放出 ( $k > n$ ) または吸収 ( $k < n$ ) されることになる。水素原子 ( $Z = 1$ ) の場合の当時の実験結果とこの計算結果はよく一致していることが示された。

(フランク-ヘルツの実験 (1914) も参照)

先の光電効果で、金属内の電子が光量子からもらうエネルギーを蓄積できないこともこの模型で説明できる。エネルギーの低い (振動数の低い) 光量子では電子は外の軌道や原子の外へ出て行くだけのエネルギーを得ることができない。原子内では電子は中途半端な位置に存在できないので、光量子とエネルギーのやりとりをすることができない。

物質波 — どちらが裏やら表やら —

光量子仮説では、光が粒子のように振る舞っていた。では、粒子が波のように振る舞うこともあるのか？

ボーアの原子模型での条件、 $mvr = n\hbar = nh/2\pi$ 、は何を意味するか  $\Rightarrow 2\pi r = n(h/mv)$

光の場合、 $h/p = \lambda$ 、をそのまま電子にもあてはめ、運動量  $p$  の電子は波長  $\lambda = h/p = h/(mv)$  の波のように振る舞うと考えると  $2\pi r = n\lambda$ 。  $\Leftarrow$  波が定常波となるための条件。

ド・ブロイ (1923)

「電子 (物質) は波動としての性質も持つ。電子のエネルギーと運動量の大きさをそれぞれ  $E$ 、 $p$  とするとその振動数は  $E/h$  で与えられ、波長は  $h/p$  で与えられる。」

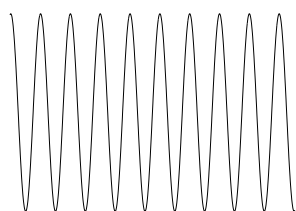
(注意!) 物質の速さ  $v$  が光速  $c$  よりもかなり遅い場合、( $v \ll c$ 。これを「非相対論的」という。高エネルギーでの素粒子反応などの特殊な場合を除いて通常は非相対論的としてよい。)、その運動エネルギーは  $mv^2/2 = p^2/(2m)$  で与えられるので、物質波の振動数は  $p^2/(2mh)$  で与えられ、波長は  $h/p$  で与えられることになる。このとき

$$(\text{波の速さ}) = (\text{振動数}) \times (\text{波長}) = \frac{p^2}{2mh} \times \frac{h}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

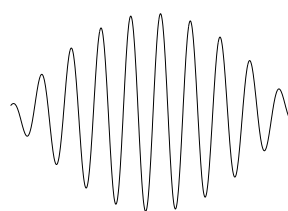
となって、物質波の速さと実際の物質の速さが異なる結果が得られる。これは理論に矛盾があるわけではなく、上の計算で得られる速さは波の「位相速度」とよばれるものであり、波の山や谷が移動する速さである。一方、「群速度」とよばれる量があり、

$$(\text{群速度}) = \frac{dE}{dp}$$

で定義できる。波が情報やエネルギーを伝えるには平面波でなく、複数の波の集まりを用いて下の右図のような形 (波束) でなければならない。



平面波



波束

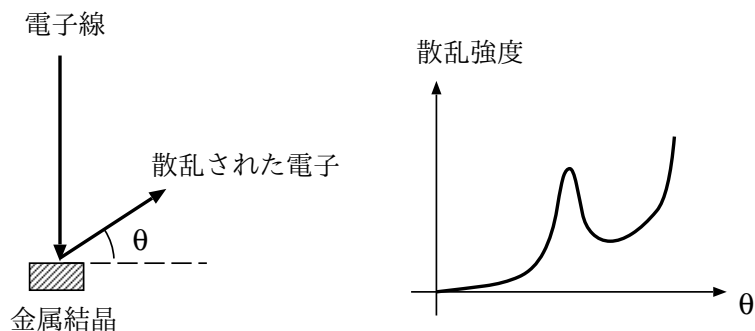
波束に対して、群速度は膨らんだ部分が移動する速さを与える。群速度の定義で計算すると

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = v$$

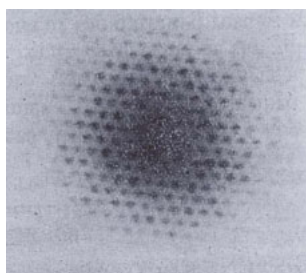
となり、物質の速さと一致する。

[デビッソン-ジャーマーの実験] (1927)

電子ビームを金属結晶に照射すると、その散乱角と強度の間には X 線の場合と似たような振る舞い(回折, 干渉)を示した。



G.P. トムソン (1927), 菊池正士 (1928) も実験で電子線の回折を確認した。



菊池正士が得たマイカ薄膜の電子線回折パターン  
(「電子の波で見る量子の世界」 外村 彰 より  
[http://www.kgt.co.jp/avs\\_conso/event/vc10/summary/data/key2.pdf](http://www.kgt.co.jp/avs_conso/event/vc10/summary/data/key2.pdf))

⇒ 電子顕微鏡へと発展