量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

角運動量

1. 角運動量演算子 L_y, L_z, $\hat{L}_\pm$ が球座標で以下のように表されることを示せ.

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right], \quad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right], \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\phi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

2. $\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z$ を示せ.

3. $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_y] = [\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$ となることを，$\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ 間の交換関係を用いて示せ. (微分を用いた具体的な表示を使わないこと)

4. $J_-|\lambda, m\rangle$ は J_z の固有値 $m-1$ の固有状態になっていることを示せ.

5. パウリ行列は以下で与えられる.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   これを用いてスピン演算子を $\hat{s}_x = (1/2)\sigma_1$, $\hat{s}_x = (1/2)\sigma_2$, $\hat{s}_z = (1/2)\sigma_3$ で定義する.

   (a) $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ 間の交換関係を求めよ.

   (b) $\hat{s}_z$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

   (c) $\hat{\vec{s}}^2 = \hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

6.

$$M_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   と定義した場合に，

   (a) M_x, M_y, M_z 間の交換関係を求めよ.

   (b) M_z の固有値と固有ベクトルを求めよ.

   (c) $\vec{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

7. 二つの独立な各運動量演算子 $\vec{J}_1$ と $\vec{J}_2$ を考えたとき，$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ とすると，$(\vec{J})^2$, J_z, $(\vec{J}_1)^2$, $(\vec{J}_2)^2$ が互いに交換可能であることを示せ.

8. $|\ell_1, \ell_1\rangle|\ell_2, \ell_2\rangle$ が $(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$ の固有値 $(\ell_1 + \ell_2)(\ell_1 + \ell_2 + 1)$ の固有状態になっていることを示せ.