量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

ポテンシャル問題

1. 1次元の調和振動子で運動量演算子を $\hat{p}$ とし，新しい演算子を以下で定義する．

$$\hat{a} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(\hat{p} - im\omega x) \quad , \quad \hat{a}^\dagger = \frac{-i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(\hat{p} + im\omega x)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(a) 交換関係 $[x, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を計算せよ．

(b) 演算子 $\hat{N}$ を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ で定義する．このとき，$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ を示せ．

(c) $\hat{N}$ の固有値 λ_n の固有状態を $|n\rangle$ とする．($\hat{N}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$) このとき $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\lambda_n - 1)\hat{a}|n\rangle$, $\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (\lambda_n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$ を示せ．

(d) $\hat{N}$ の固有値 λ_n が 0 以上の実数であることを示せ．

(e) $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\lambda_n - 1)\hat{a}|n\rangle$ から，固有値 λ_n の最小値は 0 でなくてはならないことを示せ．

(f) $\hat{N}$ の最小の固有値 0 の固有状態を $|0\rangle$ と記す．このとき状態 $(a^\dagger)^n|0\rangle$ (n は 0 以上の整数) が $\hat{N}$ の固有値 n の固有状態であることを示せ．

(g) $\langle 0|0\rangle = 1$ とする．$|n\rangle = c_n(a^\dagger)^n|0\rangle$ と定義するとき，$\langle n|n\rangle = 1$ となるように c_n を求めよ．

(h) $n \neq m$ のとき $\langle n|m\rangle = 0$ を示せ．

(i) $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \dfrac{1}{2})$ を示せ．

(j) $\hat{H}$ の固有値と固有状態を求めよ．

(k) $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ を用いて $\hat{a}|0\rangle = 0$ となる状態 $|0\rangle$ の波動関数を求めよ．

2. 球座標でラプラシアン Δ が以下のように表されることを示せ．

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

3. 3次元の球座標でポテンシャルが距離 r だけに依存する次の関数で与えられる場合につき，ハミルトニアンの固有値と固有関数を求めよ．

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r \le a) \\ V_0 & (r > a) \end{cases} \qquad (a,\, V_0 \text{ は正の定数})$$

4. 上の問題で $V_0 \to \infty$ の場合を考察せよ．