量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

量子力学の一般原理 (2)

1. エルミート行列の固有値は実数であることを示せ．

2. ユニタリー演算子を行列で表現したものはユニタリー行列になることを示せ．

3. 2 つのユニタリー演算子 U_1 と U_2 の積 U_1U_2 はユニタリー演算子であることを示せ．

4. $\hat{H}$ がエルミート演算子の場合，$e^{i\hat{H}} = \sum_{n=0} \dfrac{1}{n!}\hat{H}^n$ がユニタリー演算子であることを示せ．

5. 運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ と何回でも微分可能な関数 $\psi(x)$ につき，以下が成立することを示せ．
$$e^{ia\hat{p}/\hbar}\psi(x) = \psi(x+a) \quad (a \text{ は実数定数})$$

6. $[\,\hat{A}\,,\,\hat{B}\,] \neq 0$ のとき，$\hat{A}$ の 2 次までで以下が成立することを示せ．
$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\,\hat{A}\,,\,\hat{B}\,] + \frac{1}{2!}[\,\hat{A}\,,[\,\hat{A}\,,\,\hat{B}\,]\,] + O(\hat{A}^3)$$

7. 1 次元運動をしている質量 m の質点のハミルトニアンが
$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(x)\,, \quad (V(x) \text{ は実数関数})$$
で与えられている．
   (a) 演算子 A は t を陽に含まないとして，$\dfrac{d}{dt}\langle A\rangle = \dfrac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle$ であることを示せ．
   (b) エーレンフェストの定理
$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle\,, \quad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle$$
   が成り立つことを示せ．

8. 波動関数が $\Psi(t,\vec{r}) = \sum_n a_n(t)\psi_n(\vec{r})$ と完全規格直交系 $\{\phi_n\}$ で展開されているとする．このとき，時間に依存するシュレーディンガー方程式 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$ を，$\hat{H}$ の行列表現 H_{mn} と a_n との間の方程式に書き直せ．