

量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

量子力学の一般原理

1. 縮退の無い場合，エルミート演算子の異なる固有値に属する固有関数は直交することを示せ.
2. 上の問題で，縮退がある場合でも，同じ固有値に属する固有関数から適当な一次結合を作れば新たな関数同士は直交するようにできることを示せ. (Shumidt の方法)
3. 波動関数が無限遠で0になる場合，運動量演算子はエルミートであることを示せ.
4. 一般の演算子 \hat{O}_1, \hat{O}_2 に対し $(\hat{O}_1\hat{O}_2)^\dagger = \hat{O}_2^\dagger\hat{O}_1^\dagger$ を示せ.
5. 物理量に対応する0でない演算子 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ の間に

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$$

という関係が成立しているとする. 期待値からのずれを

$$\Delta X = \hat{X} - \langle X \rangle$$

で定義すると，

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle C \rangle^2$$

となることを示せ.

6. 1次元の自由な粒子で束縛の無い場合，波動関数を $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p)e^{ipx/\hbar} dp$ と表して

$$c(p) = e^{-p^2/(2\Delta p)} \quad (\Delta p \text{ は定数})$$

にとった場合の波動関数 $\psi(x)$ と確率密度 $|\psi(x)|^2$ を計算せよ.

7. 1次元の自由な粒子の運動で，波動関数 $\psi(x)$ が L だけ進むと元にもどる， $\psi(x+L) = \psi(x)$ ，という周期境界条件をつけた場合に運動量とエネルギーがとりうる値を求めよ.
8. 1次元の粒子の運動で，

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \leq x \leq d) \\ 0 & (d < x) \end{cases}$$

というポテンシャルに $x < 0$ の領域から x 軸の正の方向へ入射する場合について考察せよ.