量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

時間に依存しないシュレーディンガー方程式

1. 無限に深い一次元井戸型ポテンシャルの場合で，$E = \dfrac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}$ を与える波動関数を $\psi_n(x)$ と記す．このとき以下の問いに答えよ．

   (a) エネルギーの値が異なるとそれに対応する波動関数は直交することを示せ．(具体的には以下を示す．)

   $$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n(x))^* \psi_\ell dx = 0 \quad (n \neq \ell)$$

   (b) 波動関数が $\psi_n(x)$ のときの x と x^2 の期待値を求めよ．

   (c) 波動関数が $\psi_n(x)$ のときの p と p^2 の期待値を求めよ．

2. 1 次元の束縛状態には縮退が無いことを以下の手順に従って示す．同じエネルギー E を与える波動関数 ψ_1, ψ_2 があったとすると以下が成立している．

   $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi_1(x) = E\psi_1(x)\ , \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

   (a) 上から次式が成立することを示せ．

   $$\frac{d}{dx}\left[\phi_2\frac{d\psi_1}{dx} - \phi_1\frac{d\psi_2}{dx}\right] = 0$$

   (b) (a) の結果から ψ_1 と ψ_2 は比例していることを示せ．

3. 1 次元運動をしている質量 m の粒子があり，ポテンシャル $V(x)$ は $V(x) = V(-x)$ をみたすものとする。このとき以下の問いに答えよ。

   (a) $\phi(x)$ がハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ の固有関数であるとき，$\phi(x)$ と $\phi(-x)$ は $\hat{H}$ の同じ固有値に属することを示せ。

   (b) $\phi(x)$ と $\phi(-x)$ が線形独立でないとき (片方がもう片方の定数倍) $\phi(x) = \phi(-x)$ または $\phi(x) = -\phi(-x)$ であることを示せ。

4. 一次元のポテンシャルが以下の場合につき考察せよ．ただし，V_0 は正で有限の値である．

   $$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ V_0 & (a < x\ ) \end{cases}$$

5. 一次元のポテンシャルが以下の場合につき考察せよ．ただし，V_0 は正で有限の値である．

   $$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < -a) \\ 0 & (-a \leq x \leq a) \\ V_0 & (a < x) \end{cases}$$

6. 一辺の長さが a の立方体に閉じこめられた 質量 m の粒子につき，その固有関数とエネルギーを求めよ．