量子力学I 演習問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

時間に依存するシュレーディンガー方程式

1. 波動関数 $\Psi(t,\vec{r})$ が時間だけに依存する部分 $F(t)$ と位置だけに依存する部分 $G(\vec{r})$ の積で表される場合，$\Psi(t,\vec{r})=F(t)G(\vec{r})$，ハミルトニアン演算子は時間に依存しないとして以下の問いに答えよ．
   - (a) シュレーディンガー方程式に $\Psi(t,\vec{r})=F(t)G(\vec{r})$ を代入し，両辺を $F(t)G(\vec{r})$ で割った式を求めよ．
   - (b) 上で求めた式の左辺は時間だけの関数で右辺は位置だけの関数となる．等号が成立するためには，それらの値は定数とならねばならない．その定数を E として，$F(t)$，$G(\vec{r})$ の満たす方程式を求めよ．
2. 質量 m の粒子の一次元での運動で位置エネルギーが $\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ (ω は正の定数) で与えられているとする．波動関数の形を $\Psi=e^{-i\frac{i}{\hbar}Et}e^{-ax^2}$ と仮定して，シュレーディンガー方程式に代入し，以下の問いに答えよ．
   - (a) E が定数となるために a がとるべき値を求めよ．
   - (b) 上で求めた a の値を用いて E を計算せよ．
3. 1 次元調和振動子 (位置エネルギー $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$) のオイラー・ラグランジュ方程式と正準方程式を求めよ．
4. 交換関係で $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$ が成立することを示せ．
5. 交換関係 $[\hat{x}\ ,\ (\hat{p})^2]$，$[(\hat{x})^2\ ,\ \hat{p}]$，$[(\hat{x})^2\ ,\ (\hat{p})^2]$ を計算せよ．
6. 古典力学では角運動量は $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ で定義される．以下の問いに答えよ．
   - (a) L_x, L_y, L_z を x, y, z, p_x, p_y, p_z で表せ．
   - (b) 上で求めた L_x, L_y, L_z を量子化 (運動量を演算子で置き換える) して，角運動量演算子 $\hat{L}_x$ $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ を求めよ．
   - (c) $\hat{L}_x$ $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ の間の交換関係を全て計算せよ．