物理数学 B 中間試験問題 (2019, 6/13) 担当：栗本

- **以下の大問 1 に必答し，残りの大問 2, 3 から 1 つを選んで解答せよ．2 つ以上選んではいけない．**
- **全ての解答用紙に氏名と番号を記入すること。**
- **大問 1 を除き，解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．(問題文にその旨が記されていない限り) 結果だけの解答や途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．**

1. **(必答問題)** 以下の問いに答えよ．**この問題への解答は結果のみを記すこと**.

ただし，小問 (2), (3), (4) では，あなたの学籍番号の末尾 2 桁を ab とした場合の a, b の値を用いよ．たとえば学籍番号が 11940185 なら $a = 8$, $b = 5$ である．

(1) 3×3 行列 $M^{[pq]}$ $(p, q = 1, 2, 3)$ の ij 成分を $(M^{[pq]})_{ij} = \delta_{pi}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{qi}$ で定義する．$M^{[13]}$ を行列の形で書き下せ．

(2) $\left|\sum_{k=0}^{9} e^{ik\pi/4}(\delta_{ka} + \delta_{kb})\right|^2$ の値を求めよ．(ただの二乗ではなく絶対値であることと，学籍番号の a, b であることに注意!)

(3) δ 関数を含む積分 $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \; \delta\left(\sin\theta - \frac{1}{(a+2)}\right) \, d\theta$ の値を求めよ．(学籍番号の a に注意!)

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+9}} \; \delta(\sqrt{x^2+y^2} - b + 10) \, dxdy$ の値を求めよ． (学籍番号の b に注意!)

(5) $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

をフーリエ級数: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ で表した場合，$n \neq 0$ での C_n を求めよ.

(6) 微分方程式 $\frac{d^2}{dt^2}G(t) + \frac{d}{dt}G(t) + \omega^2 G(t) = -\delta(t)$ (ω は正の実数) を考える．$G(t)$ を $G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{ikt}dk$ と表して元の微分方程式に代入し，$c(k)$ を求めよ．

(7) 微分方程式 $\frac{d^2f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} + 4f = 0$ の解として $f(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ ($c_{0,1,2}$ は実数定数) の形を仮定し，微分方程式に代入することで係数 c_0，c_1，c_2 を求めよ．ただし，関数 $f(x)$ は $f(0) = 1$ を満たすものとする．

2. 1 次元波動方程式 $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = 0$ (v は正の実数定数) を境界条件 $f(0,t) = f(L,t) = 0$ (L は正の実数定数) の下で解くことを考える．

(1) 関数 $\sin(kx)$ は $x = 0$ で 0 になる．この関数が $x = L$ でも 0 になるために k がとるべき値を，自然数 n と L を用いて表わせ．(5 点)

(2) (1) で求めた k を k_n と記すことにする．t の関数 $C_n(t)$ を用いて $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\sin(k_n x)$ という形に表せるとした場合，この $f(x,t)$ が問題の 1 次元波動方程式の解となるとき，$C_n(t)$ が満たすべき微分方程式を求めよ．(15 点)

(3) (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ．(10 点)

3. 関数 $D(\vec{r},t)$ $(\vec{r} = (x,y,z))$ を以下で定義する：

$$D(\vec{r},t) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}] \quad (\omega = |\vec{k}|)\ .$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $D(\vec{r},t)$ は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] D(\vec{r},t) = 0$$

を満たすことを示せ．(10 点)

(2) 積分可能な任意の関数 $f(k)$ と実数の定数 a に対し，

$$\int_{-a}^{a} f(k)\ dk = \int_{-a}^{a} f(-k)\ dk$$

が成立することを示せ．(10 点)

(3) $D(\vec{r},t)$ の時間微分が

$$\left.\frac{\partial D(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta^3(\vec{r})$$

を満たすことを示せ. (左辺では，t で微分してから $t = 0$ とすることに注意せよ．) (10 点)

以上

解答例

1. (1) 定義に従って行列の各成分を計算すれば

$$M^{[13]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{9} e^{ik\pi/4}(\delta_{ka}+\delta_{kb})\right|^2 &= \left|e^{ia\pi/4}+e^{ib\pi/4}\right|^2 = \left\{e^{ia\pi/4}+e^{ib\pi/4}\right\}^* \left\{e^{ia\pi/4}+e^{ib\pi/4}\right\} \\
&= \left\{e^{-ia\pi/4}+e^{-ib\pi/4}\right\}\left\{e^{ia\pi/4}+e^{ib\pi/4}\right\} \\
&= 1+e^{i(b-a)\pi/4}+e^{-i(b-a)\pi/4}+1 = 2+2\cos\left(\frac{(b-a)\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

(3) $\sin\theta = t$ とおくと $\cos\theta d\theta = dt$ なので

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\ \delta\left(\sin\theta - \frac{1}{(a+2)}\right)\ d\theta = \int_0^1 t^2\ \delta\left(t-\frac{1}{(a+2)}\right)\ dt = \frac{1}{(a+2)^2}$$

(4) b は 0 から 9 までの間の整数なので $-b+10>0$ であるから $\sqrt{x^2+y^2}-b+10>0$．よって δ 関数の中が 0 にならないので $\delta(\sqrt{x^2+y^2}-b+10)=0$ となり，求める積分の値も 0 になる．

(5) $C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}$ より，$n\neq 0$ で

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(+1)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-inx}}{(-in)}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{(-in)}\right]_0^{\pi} = \frac{(1-e^{in\pi})}{2\pi in} - \frac{(e^{-in\pi}-1)}{2\pi in} \\
&= \frac{1-(-1)^n-(-1)^n+1}{2\pi in} = \frac{(-i)}{n\pi}\{1-(-1)^n\}
\end{aligned}$$

(6) $G(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{ikt}dk$ を $\dfrac{d^2}{dt^2}G(t)+\dfrac{d}{dt}G(t)+\omega^2 G(t) = -\delta(t)$ へ代入すると

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}+\omega^2\right]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{ikt}dk\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}+\omega^2\right]e^{ikt}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)\left[-k^2+ik+\omega^2\right]e^{ikt}dk
\end{aligned}$$

これが $-\delta(t) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}dk$ と一致するには

$$\begin{aligned}
c(k)\left[-k^2+ik+\omega^2\right] &= -1 \\
c(k) &= \frac{1}{k^2-ik-\omega^2}
\end{aligned}$$

(7) 微分方程式 $\dfrac{d^2f}{dx^2}-2x\dfrac{df}{dx}+4f=0$ に $f(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$ を代入すると，$f'(x)=2c_2x+c_1$，$f''(x)=2c_2$ なので

$$\begin{aligned}
2c_2-2x(2c_2x+c_1)+4(c_2x^2+c_1x+c_0) &= 0 \\
(-4c_2+4c_2)x^2+(-2c_1+4c_1)x+2c_2+4c_0 &= 0 \\
2c_1x+2(c_2+2c_0) &= 0
\end{aligned}$$

これが任意の x で成立するには $c_1=0$ かつ $c_2=-2c_0$．よって $f(x)=-2c_0x^2+c_0$．初期条件 $f(0)=1$ より $c_0=1$．以上から $c_2=-2$，$c_1=0$，$c_0=1$．$(f(x)=-2x^2+1)$

2. (1) 条件は $\sin(kL)=0$ となり，これが満たされるのは $kL=n\pi$ のとき．よって $k=\dfrac{n\pi}{L}$.

(2) (1) より $k_n=\dfrac{n\pi}{L}$ であるので，$f(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ となる．これを 1 次元波動方程式に代入すると

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)=\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right]C_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}$$

波動方程式が成立するためには $C_n(t)$ は次の微分方程式を満たさねばならない．

$$\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}C_n(t)+\frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n(t)=0$$

(3) (2) で求めた方程式を変形して

$$\frac{d^2}{dt^2}C_n(t)=-\frac{n^2\pi^2v^2}{L^2}C_n(t)$$

これは単振動の方程式と同じ形なので，一般解は

$$C_n(t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)+B_n\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\quad (A_n,\ B_n \text{ は定数})$$

3. (1)

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]D(\vec{r},t)\\ =&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left(\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}]\right)\\ =&\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left\{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\}\\ =&\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\left[\left\{(i\vec{k})^2-(-i\omega)^2\right\}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-\left\{(-i\vec{k})^2-(i\omega)^2\right\}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]\\ =&\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}\left\{-|\vec{k}|^2+\omega^2\right\}\left\{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right\}=0\end{aligned}$$

最後のところで $\omega=|\vec{k}|$ を用いた．

(2) $k=-s$ と変数変換して

$$\int_{-a}^{a}f(k)\ dk=\int_{a}^{-a}f(-s)\ (-ds)=\int_{-a}^{a}f(-s)\ ds=\int_{-a}^{a}f(-k)\ dk$$

ここで 2 番目の等号では，定積分の上限と下限を入れ替えることによるマイナス符号と $-ds$ のマイナス符号を相殺している．3 番目の等号では，定積分の積分変数の記号は自由にとれることを用いている．

(3)

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial D(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}]\right]\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2\omega}[(-i\omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-i\omega e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}]\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2}[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\vec{k}}{2}[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}] \quad (\text{(2) の結果を用いた}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^3\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \delta^3(\vec{r})
\end{aligned}
$$