# 物理数学 B 中間試験問題 (H30, 6/4) 担当：栗本

- 以下の 大問 1 に必答し，残りの大問 **2, 3** から **1** つを選んで解答せよ．**2** つ以上選んではいけない．
- 全ての解答用紙に氏名と番号を記入すること。
- 大問 **1** を除き，解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．(問題文にその旨が記されていない限り) 結果だけの解答や途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．

1. **(必答問題)** 以下の問いに答えよ．この問題への解答は結果のみを記すこと．(各 10 点)

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} e^{in\pi/3}(-\delta_{n1}+\delta_{n5})$ を求めよ．(5 点)

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\ (1-\delta_{1n})\ e^{in\pi/4}\ \delta_{nk}\ (1-\delta_{1k})$ を求めよ．(10 点)

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2x-\pi)\cos(x+\frac{\pi}{6})\ dx$ を求めよ．(5 点)

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\delta(\sqrt{x^2+y^2}-3)\ dxdy$ (hint: 極座標を用いる．積分範囲に注意) を求めよ．(10 点)

   (e) $a$ を正の実数定数とし，$-\pi\le x\le\pi$ で定義された関数

   $$f(x)=\begin{cases} 1/a & (0\le x\le a\ のとき) \\ 0 & (それ以外のとき) \end{cases}$$

   をフーリエ級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}$ で表した場合，$n\neq 0$ での $C_n$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{a\to 0}C_n$ も求めよ．(15 点)

   (f) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を用いた表現を $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\ e^{ikx}\ dk$ で定義する．$f(x)$ として上の問 (e) と同じ関数をとるとき，$k\neq 0$ での $C(k)$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{a\to 0}C(k)$ も求めよ．(15 点)

   (g) 関数 $G(x,t)$ は偏微分方程式 $\left[i\dfrac{\partial}{\partial t}+a\dfrac{d^2}{dx^2}\right]G(t,x)=\delta(t)\delta(x)$ を満たしている．($i$ は虚数単位．$a$ は正の実数定数) $G(x,t)$ のフーリエ変換による表現 $G(x,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,k)\ e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk$ をこの偏微分方程式に代入し $F(\omega,k)$ を求めよ．(10 点)

   (h) 微分方程式 $(1-x^2)\dfrac{d^2f}{dx^2}-2x\dfrac{df}{dx}+6f=0$ の解として $f(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$ ($c_{0,1,2}$ は実数定数) の形を仮定し，微分方程式に代入することで係数 $c_0$，$c_1$，$c_2$ を求めよ．ただし，関数 $f(x)$ は $f(0)=1$ を満たすものとする．(10 点)

2. 時間 $t$ の関数 $f(t)$ が微分方程式 $\dfrac{df}{dt}=af+bf^3$ ($a$, $b$ は実数定数) を満たしており，$t=0$ で $f(0)=k$ ($k$ は実数定数) とする．$t=0$ から微小な時間 $\beta$ ($|\beta|\ll 1$) だけ経過したときの関数の値 $f(\beta)$ を，二次までのテーラー展開を用いて $\beta$ の二次まで の近似で求め，$k$，$\beta$，$a$，$b$ のうち必要なものを用いて表せ．(20 点)

3. 関数 $g(x,y,z)$ は 偏微分方程式 $\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]g(x,y,z)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ を満たしている．

   (a) $g(x,y,z)$ のフーリエ変換による表現 $g(x,y,z)=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(k_x,k_y,k_z)\ e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_xdk_ydk_z$ をこの偏微分方程式に代入し $F(k_x,k_y,k_z)=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\dfrac{1}{(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}$ を示せ．(5 点)

   (b) $k_x$，$k_y$，$k_z$ の積分を実行して関数 $g(x,y,z)$ を求めよ．ただし，公式 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$ は証明抜きで用いてよい．(15 点)

以上

解答例

1. (a)

$$\sum_{n=0}^{5} e^{in\pi/3}(-\delta_{n1}+\delta_{n5}) = -e^{i\pi/3}+e^{i5\pi/3} = -(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\sqrt{3}i$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(1-\delta_{1n})e^{in\pi/4}\delta_{nk}((1-\delta_{1k}) = \sum_{n=1}^{2}(1-\delta_{1n})e^{in\pi/4}((1-\delta_{1n}) = e^{i2\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$$

(c) $2x=y$ とおけば，$dx=dy/2$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2x-\pi)\cos(x+\frac{\pi}{6})\ dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(y-\pi)\cos(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6})\ \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$$

(d) 極座標 $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ に直すと，$dxdy=rdr\ d\theta$ なので，積分範囲に注意して

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\delta(\sqrt{x^2+y^2}-3)\ dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\infty}\delta(r-3)\ rdr\right)d\theta = 3\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

(e) $n\neq 0$ で

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^a\frac{1}{a}e^{-inx}\ dx = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{e^{-inx}}{(-in)}\right]_0^a = \frac{1-e^{-ina}}{2\pi ina} \\
\lim_{a\to 0}C_n &= \lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-ina}}{2\pi ina} = \frac{(-1)}{2\pi in}\left(\frac{e^{-ina}-e^0}{a-0}\right) = \frac{(-1)}{2\pi in}\ \frac{d}{da}e^{-ina}\Big|_{a=0} = \frac{(-1)}{2\pi in}(-in) = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

(f) $k\neq 0$ で

$$\begin{aligned}
C(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a\frac{1}{a}e^{-ikx}\ dx = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)}\right]_0^a = \frac{1-e^{-ika}}{ika\sqrt{2\pi}} \\
\lim_{a\to 0}C(k) &= \lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-ika}}{ika\sqrt{2\pi}} = \frac{(-1)}{\sqrt{2\pi}ik}\left(\frac{e^{-ika}-e^0}{a-0}\right) = \frac{(-1)}{\sqrt{2\pi}ik}\ \frac{d}{da}e^{-ika}\Big|_{a=0} = \frac{(-1)}{\sqrt{2\pi}ik}(-ik) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

(g) 偏微分方程式 $\left[i\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{d^2}{dx^2}\right]G(t,x)=\delta(t)\delta(x)$ に $G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,k)\ e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk$ と $\delta(t)\delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\left[i\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{d^2}{dx^2}\right]\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,k)\ e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,k)\ \left[\omega-ak^2\right]e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{ikx}\ d\omega dk
\end{aligned}$$

この関係式が成立するには $F(\omega,k)=\frac{1}{2\pi(\omega-ak^2)}$.

(h) 微分方程式 $(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}-2x\frac{df}{dx}+6f=0$ に $f(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(1-x^2)2c_2-2x(2c_2x+c_1)+6(c_2x^2+c_1x+c_0) &= 0 \\
(6c_2-6c_2)x^2+(6c_1-2c_1)x+(2c_2+6c_0) &= 0 \\
4c_1x+2(c_2+3c_0) &= 0
\end{aligned}$$

これが任意の $x$ で成立するには $c_1=0$ かつ $c_2=-3c_0$ でなければならない．このとき $f(x)=-3c_0x^2+c_0$.
条件 $f(0)=1$ より $c_0=1$．よって $c_2=-3$，$c_1=0$，$c_0=1$．(このとき $f(x)=-3x^2+1$．)

2. 微分方程式 $\dfrac{df}{dt} = af + bf^3$ から

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = a\frac{df}{dt} + 3bf^2\frac{df}{dt} = a(af + bf^3) + 3bf^2(af + bf^3) = f(a + 3bf^2)(a + bf^2)$$

この結果と二次までのテーラー展開を用いて

$$\begin{aligned} f(\beta) &= f(0) + \dot{f}(0)\beta + \frac{1}{2}\ddot{f}(0)\beta^2 + O(\beta^3) \\ &= k + (ak + bk^3)\beta + \frac{1}{2}k(a + 3bk^2)(a + bk^2)\beta^2 + O(\beta^3) \end{aligned}$$

3. (a) 偏微分方程式 $\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right] g(x,y,z) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ に

$g(x,y,z) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y,k_z)\ e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_x dk_y dk_z$ と

$\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_x dk_y dk_z$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y,k_z)\ e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_x dk_y dk_z \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y,k_z)\ \{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\}e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_x dk_y dk_z \\ (\text{右辺}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk_x}e^{iyk_y}e^{izk_z}\ dk_x dk_y dk_z \end{aligned}$$

両者が一致するには

$$F(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\frac{1}{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}$$

(b) $F(k_x,k_y,k_z)$ を $g(x,y,z)$ の表式に代入し，直交座標を球座標に直し，$k = |\vec{k}|$，$r = |\vec{r}|$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(\vec{r}) &= \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2}dk_x dk_y dk_z = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2}k^2\sin\theta d\phi d\theta dk \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta dk = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{ikr}\left[-e^{ikr\cos\theta}\right]_0^{\pi} dk \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{(e^{ikr} - e^{-ikr})}{ikr}dk = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{2i\sin(kr)}{ikr}dk \\ (kr = y\ \text{として}) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\frac{dy}{r} = \frac{1}{2\pi^2 r}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi r} \end{aligned}$$