物理数学 B 中間試験問題 (H29, 6/2) 担当：栗本

• 以下の 大問 1, 2 に必答し，残りの大問 3,4 から 1 つを選んで解答せよ．2 つ以上選んではいけない．
• 全ての解答用紙に氏名と番号を記入すること。
• 解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．(問題文にその旨が記されていない限り) 結果だけの解答や途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．

1. 以下の計算を行え．**(この問題の解答は結果のみを記すこと．)** (各 10 点)

ただし，小問 (b), (c) では，あなたの学籍番号の末尾 2 桁を ab とした場合の a, b の値を用いよ．たとえば学籍番号が 11640174 なら $a = 7, b = 4$ である．オープンクラス受講生は $a = 6, b = 3$ とせよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{4}\sum_{k=0}^{8} e^{in\pi/2}e^{-ik\pi/4}\delta_{nk}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^3\ \delta(2x^2-10+a)\,dx$

(c) $\vec{r}=(x,y,z)$，$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=(1,a,b)$ として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\vec{r}|^2}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{A})\,dxdydz$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\ e^{-inx}\,dx$ (n は **奇数** の整数)

2. **(必答問題)** 質量 m で電荷 q を持つ質点の時刻 t での位置を $\vec{r}(t)=(\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ )$ とする．以下のそれぞれの場合で，この質点の運動方程式を $x(t), y(t), z(t)$ についての微分方程式の形に書き下せ．
(この問題の解答は結果のみを記すこと．方程式の解は求めないこと．解答に $\vec{r}$ や $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$ を残さないこと．余計なことを記した場合，正しくても加点しないし， 間違いがあれば減点する．) (各 10 点)

(a) z 軸の負の方向への一様な重力 (大きさ mg) と大きさが $\mu\{\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\}^2$ (μ は正の実数定数) で表される抵抗力を受ける場合の運動

(b) 原点に質量 M の質点が固定されていて，そこから万有引力を受ける場合の運動 (万有引力定数を G とする．)

(c) 一様な電場 $\vec{E}=(E,0,0)$ と一様な磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$ (E, B は実数の定数) の双方が存在する空間中での運動

3. 関数 $f(x)$ を以下で定義し，

$$f(x)=\begin{cases}1/(2L) & (|x|\le L)\\ 0 & (|x|>L)\end{cases}\qquad (L>0)$$

$f(x)$ のフーリエ変換 $C(k)$ を以下で定義する．

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}C(k)\,e^{ikx}\,dk\ ,\quad C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}\,dx$$

(a) $C(0)$ を求めよ．(10 点)

(b) $k\neq 0$ のとき $C(k)$ を求めよ．(15 点)

(c) $\displaystyle\lim_{L\to 0}C(k)$ を求めよ．(5 点)

4. $|x|<1$ で定義された x の関数 $f(x)$ につき微分方程式 $(1+x)\dfrac{df}{dx}=-f$ が成立しているとき，級数を用いてこの微分方程式を解くことを考える．$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と仮定して，以下の問いに答えよ．

(a) $\dfrac{df}{dx}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$ を示せ． ($k=0$ から始まることに注意!) (5 点)

(b) $x\dfrac{df}{dx}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k$ を示せ．($k=1$ から始まることに注意!) (5 点)

(c) もとの微分方程式に $\dfrac{df}{dx}$，$x\dfrac{df}{dx}$，f の級数を代入し，x^0 の係数を比較することで $a_0=-a_1$ を示せ．(10 点)

(d) もとの微分方程式の一般解を求め，x の級数ではない**有理関数の形で表わせ**．(級数の方法で解くこと．別の方法で解いたら 0 点．) (10 点)

以上

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4}\sum_{k=0}^{8} e^{in\pi/2}e^{-ik\pi/4}\delta_{nk} &= \sum_{n=0}^{4} e^{in\pi/2}e^{-in\pi/4} = \sum_{n=0}^{4} e^{in\pi/4} = 1+e^{i\pi/4}+e^{2i\pi/4}+e^{3i\pi/4}+e^{4i\pi/4} \\ &= 1+\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}+i+\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}+(-1) = (1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

(b) $2x^2 = t$ とおくと $4xdx = dt$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3\ \delta(2x^2-10+a)\ dx &= \int_0^\infty x^3\ \delta(t-10+a)\ \frac{dt}{4x} = \int_0^\infty \frac{x^2}{4}\ \delta(t-10+a)\ dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t}{8}\ \delta(t-10+a)\ dt = \frac{10-a}{8}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\vec{r}|^2}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{A})\ dxdydz &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\delta(x-A_x)\delta(y-A_y)\delta(z-A_z)\ dxdydz \\ &= \frac{1}{A_x^2+A_y^2+A_z^2} = \frac{1}{1+a^2+b^2}\end{aligned}$$

(d) n は奇数であり，0 ではないことに注意して，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\ e^{-inx}\ dx &= \int_{-\pi}^{0}(-x)\ e^{-inx}\ dx + \int_0^{\pi} x\ e^{-inx}\ dx = \int_0^{\pi} x\ e^{inx}\ dx + \int_0^{\pi} x\ e^{-inx}\ dx \\ &= \int_0^{\pi} x(e^{inx}+e^{-inx})dx = \int_0^{\pi} 2x\ \cos(nx)\ dx = \left[\frac{2x}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2}{n}\sin(nx)\ dx \\ &= 0+\left[\frac{2}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2}\{(-1)^n-1\} = -\frac{4}{n^2}\quad (n\ \text{は奇数なので}\ (-1)^n=-1)\end{aligned}$$

2. 以下，時間微分をドット ($\dot{}$) で表す.

(a) 抵抗力は速度ベクトルと平行で逆向きなので，運動方程式は $m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z - \mu(\dot{\vec{r}})^2(\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|)$ で与えられる．これを成分に分解して，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\mu\{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2\}\frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}} = -\mu\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}\ \dot{x} \\ m\ddot{y} &= -\mu\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}\ \dot{y} \\ m\ddot{z} &= -mg-\mu\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2+(\dot{z})^2}\ \dot{z}\end{aligned}$$

(b) 万有引力は位置ベクトルと平行で逆向きなので，運動方程式は $m\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{GMm}{(\vec{r})^2}(\vec{r}/|\vec{r}|)$ で与えられる．これを成分に分解して，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ m\ddot{y} &= -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ m\ddot{z} &= -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

(c) ローレンツ力は $q\vec{E}+q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$ で与えられるので，これを成分に分解して，

$$m\ddot{x} = qE+qB\dot{y}\quad,\quad m\ddot{y} = -qB\dot{x}\quad,\quad m\ddot{z} = 0$$

3. (a) 定義から

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2L}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(b)

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2L} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2L} \left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)} \right]_{-L}^{L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}2L} \frac{(e^{-ikL} - e^{ikL})}{(-ik)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2L} \frac{-2i\sin(kL)}{(-ik)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kL)}{kL} \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{L\to 0} C(k) = \lim_{L\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kL)}{kL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

4. (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ より

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad (n=0 \text{ の項は } 0 \text{ になるので}) \\ (n-1=k \text{ とおいて}) \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned}$$

(b)

$$x\frac{df}{dx} = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k \quad (n=k \text{ とおいた})$$

(c) もとの微分方程式に $\frac{df}{dx}$，$x\frac{df}{dx}$，f の級数を代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ a_1 x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k &= -a_0 x^0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \end{aligned}$$

x^0 の係数が両辺で一致することから $a_1 = -a_0$.

(d) x^k $(k \geq 1)$ の項の係数を比較して

$$\begin{aligned} (k+1) a_{k+1} + k a_k &= -a_k \\ (k+1) a_{k+1} &= -(k+1) a_k \\ a_{k+1} &= -a_k \end{aligned}$$

よって，(c) の結果を用いて $a_0 = -a_1 = a_2 = \cdots = (-1)^n a_n$．これから

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{a_0}{1-(-x)} = \frac{a_0}{1+x}$$

($|x| < 1$ なので，等比級数の和の公式を用いた．)