物理数学 A 中間試験問題 (H30, 11/16) 担当：栗本

- **以下の大問 1 (必答 70 点) と，大問 {2，3，4} (各 30 点) から 1 つを選択して，合計大問 2 つに解答せよ．(大問 2∼4 から 2 つ以上選択してはいけない．そうした場合，選択問題は採点せずに全て 0 点とする．)**
- **全ての解答用紙に氏名と学籍番号を記入すること。**
- **大問 2∼4 の解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．結果だけの解答、途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．**
- **結果が単なる数値かベクトルか行列かをはっきりと区分して示すこと．(たとえば，単に 0 と書いてあったら数値の 0 とみなす．零ベクトルなら $\vec{0}$，零行列なら O のように大きく記すか，成分を全部記すこと．)**
- **問題 1 の小問 (a)，(b)，(d)，(e) と大問 2 では，あなたの学籍番号の末尾 2 桁を ab とした場合の a, b の値を用いよ．たとえば学籍番号が 11840175 なら $a = 7$, $b = 5$ である．**

以下の問題中で，$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ とし，i は $i^2 = -1$ となる虚数単位, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である.

1. $\boxed{\textbf{必答}}$ 次の計算を行え．((a)∼(e): 各 8 点，(f)∼(h): 各 10 点) **<u>この問題の解答は結果のみを記すこと．</u>**

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 5-a \\ i \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -i(10-b) \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$ として，$(\vec{v})^\dagger \vec{w}$ (b) $\begin{pmatrix} 5-a & 3 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & b+1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}^{-1}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}^2$ (d) $\det \begin{pmatrix} 0 & a+1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 11-b & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{20-a-b}$

(f) 勾配: $\nabla\{\cos(r^2)\}$ (g) 発散: $\nabla \cdot \left(\dfrac{\vec{r}}{r^6}\right)$ (h) 回転: $\nabla \times (r^2 z,\ 0,\ r^2 x)$

2. 行列 $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4i \\ 0 & a+6 & 0 \\ -4i & 0 & -3 \end{pmatrix}$ を考える．(ここでの a の値は各自の学籍番号で決まる値とする．)

   (a) 行列 X の固有値を全て求めよ．(15 点)

   (b) X を対角化するユニタリー行列を求めよ．(15 点)

3. (a) 行列 A を対角行列 (対角成分以外の行列要素が全て 0 の行列) とし，その対角成分は全て相異なるものとする．この行列 A と別の行列 B との間で $AB = BA$ が成立するとき，B も対角行列であることを示せ．(15 点)

   (b) エルミート行列 H の固有値に縮退が無く，H を対角化するユニタリー行列を U とする．この行列 H と別のエルミート行列 M との間で $MH = HM$ が成立するとき，M もユニタリー行列 U で対角化できることを示せ．(15 点)

4. $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は各成分が時間 t と位置 x, y, z の関数になっているベクトルであり，次の偏微分方程式を満たしている．

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \ , \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

別のベクトル $\vec{S}$ を $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ で定義する．このとき $\nabla \cdot \vec{S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\{(\vec{E})^2 + (\vec{B})^2\} = 0$ が成立することを示せ．ただし，ベクトル解析の公式を用いる場合はその証明も記すこと．(30 点)

以上

解答例

1. (a)

$$(\vec{v})^\dagger \vec{w} = (-i,\ 5-a,\ -i)\begin{pmatrix} -i(10-b) \\ 2 \\ i \end{pmatrix} = -(10-b)+2(5-a)+1 = -2a+b+1$$

(b)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 5-a & 3 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & b+1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 5-a & 3 \\ 0 & i \end{pmatrix}\frac{1}{(b+3)}\begin{pmatrix} 2i & -(b+1) \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(b+3)}\begin{pmatrix} 3+2(5-a)i & -(5-a)(b+1)-3i \\ i & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a+1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 11-b & 1 \end{pmatrix} = 2(11-b)-6+(a+1) = a-2b+17$$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ であることを用いれば，$20-a-b$ を 4 で割った余りを p として

$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f)

$$\begin{aligned}\nabla\{\cos(r^2)\} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cos(x^2+y^2+z^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}\cos(x^2+y^2+z^2) &= -2x\ \sin(x^2+y^2+z^2) \\ \frac{\partial}{\partial y}\cos(x^2+y^2+z^2) &= -2y\ \sin(x^2+y^2+z^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}\cos(x^2+y^2+z^2) &= -2z\ \sin(x^2+y^2+z^2) \\ \nabla\{\cos(r^2)\} &= -2(x,\ y,\ z)\sin(x^2+y^2+z^2) = -2\vec{r}\sin(r^2)\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^6}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}[x(x^2+y^2+z^2)^{-3}]+\frac{\partial}{\partial y}[y(x^2+y^2+z^2)^{-3}]+\frac{\partial}{\partial z}[z(x^2+y^2+z^2)^{-3}] \\ &= (x^2+y^2+z^2)^{-3}-6x^2(x^2+y^2+z^2)^{-4}+(x^2+y^2+z^2)^{-3}-6y^2(x^2+y^2+z^2)^{-4} \\ &\quad +(x^2+y^2+z^2)^{-3}-6z^2(x^2+y^2+z^2)^{-4} \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)^{-3}-6(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-4} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-3} = -3r^{-6}\end{aligned}$$

(h)

$$
\begin{aligned}
& \nabla \times (r^2 z,\ 0,\ r^2 x) \\
= & \left(\frac{\partial (r^2 x)}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z},\ \frac{\partial (r^2 z)}{\partial z} - \frac{\partial (r^2 x)}{\partial x},\ \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (r^2 z)}{\partial y}\right) \\
= & \left(\frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)x\},\ \frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)z\} - \frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)x\},\ -\ \frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)z\}\right) \\
= & (2xy,\ (x^2+y^2+3z^2)-(3x^2+y^2+z^2),\ -2yz) \\
= & (2xy,\ 2(z^2-x^2),\ -2yz)
\end{aligned}
$$

2. (a) X の固有値を t，単位行列を I とすると，固有値方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(X - tI) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 4i \\ 0 & a+6-t & 0 \\ -4i & 0 & -3-t \end{pmatrix} \\
&= (t-3)(t+3)(a+6-t) + 0 + 0 - (4i)(-4i)(a+6-t) - 0 - 0 \\
&= (a+6-t)(t^2-9-16) = (a+6-t)(t^2-25) = (a+6-t)(t-5)(t+5)
\end{aligned}
$$

よって X の固有値は 5，-5，$a+6$.

(b) X の固有ベクトルを $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
X\vec{v} &= t\vec{v} \\
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4i \\ 0 & a+6 & 0 \\ -4i & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3p+4ir \\ (a+6)q \\ -4ip-3r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} tp \\ tq \\ tr \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$t=5$ のとき，$p=2ir$，$q=0$．よって $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2ir \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ の形になる．ベクトルの大きさを 1 にするには $|2ir|^2 + |r|^2 = 5|r|^2 = 1$ になればよいので，$r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ にとる．

$t=-5$ のとき，$2ip=r$，$q=0$．よって $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 2ip \end{pmatrix}$ の形になる．ベクトルの大きさを 1 にするには $|p|^2 + |2ip|^2 = 5|p|^2 = 1$ になればよいので，$p = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ にとる．

$t=a+6$ のとき，$p=r=0$，よって $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$ の形になる．ベクトルの大きさを 1 にするには $|q|^2=1$ になればよいので，$q=1$ にとる．

求めた固有ベクトルを並べて

$$
\begin{pmatrix} 2i/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2i/\sqrt{5} \end{pmatrix}
$$

が求めるユニタリー行列になる．

3. (a) A が対角行列で対角成分以外は 0 だから，行列の積 AB の成分は $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = A_{ii}B_{ij}$ と表される．同様にして，行列の積 BA の成分は $(BA)_{ij} = \sum_k B_{ik}A_{kj} = B_{ij}A_{jj}$ と表される．$AB = BA$ なので $(AB)_{ij} = (BA)_{ij}$，よって

$$A_{ii}B_{ij} = B_{ij}A_{jj} \Rightarrow (A_{ii} - A_{jj})B_{ij} = 0$$

行列 A の対角成分は全て相異なるので，$i \neq j$ なら $B_{ij} = 0$ となり，行列 B も対角行列である．

(b) エルミート行列 H がユニタリー行列 U で対角化されるので $U^\dagger HU = \hat{H}$ とすると，$\hat{H}$ は対角行列で，その成分は H の固有値となる．H に縮退が無いので，$\hat{H}$ は要素が全て異なる対角行列になっている．H と M の間で $MH = HM$ が成立しているので，この式の左から $U^\dagger$，右から U をかけると

$$\begin{aligned} U^\dagger MHU &= U^\dagger HMU \\ &\quad U \text{ はユニタリー行列なので } UU^\dagger = I \ (I \text{ は単位行列}) \text{ を用いて} \\ U^\dagger MUU^\dagger HU &= U^\dagger HUU^\dagger MU \\ U^\dagger MU\hat{H} &= \hat{H}U^\dagger MU \end{aligned}$$

$U^\dagger MU$ が $\hat{H}$ と可換 (行列の積の順序を入れ替えても結果が同じであること) なので，(a) の結果より $U^\dagger MU$ も対角行列であり，M も U で対角化されている．

4. (以下，簡単のため $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を ∂_x と記す．y, z，t についても同様．)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{S} &= \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= \partial_x(E_yB_z - E_zB_y) + \partial_y(E_zB_x - E_xB_z) + \partial_z(E_xB_y - E_yB_x) \\ &= \quad (\partial_xE_y)B_z + E_y(\partial_xB_z) - (\partial_xE_z)B_y - E_z(\partial_xB_y) \\ &\quad +(\partial_yE_z)B_x + E_z(\partial_yB_x) - (\partial_yE_x)B_z - E_x(\partial_yB_z) \\ &\quad +(\partial_zE_x)B_y + E_x(\partial_zB_y) - (\partial_zE_y)B_x - E_y(\partial_zB_x) \\ &= \quad (\partial_xE_y - \partial_yE_x)B_z + (\partial_yE_z - \partial_zE_y)B_x + (\partial_zE_x - \partial_xE_z)B_y \\ &\quad -(\partial_xB_y - \partial_yB_x)E_z - (\partial_yB_z - \partial_zB_y)E_x - (\partial_zB_x - \partial_xB_z)E_y \\ &= (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

問題にある方程式を用いて

$$= -(\partial_t\vec{B}) \cdot \vec{B} - (\partial_t\vec{E}) \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2}\partial_t\{(\vec{B})^2 + (\vec{E})^2\}$$

よって $\nabla \cdot \vec{S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\{(\vec{E})^2 + (\vec{B})^2\} = 0.$