# 物理数学 A 中間試験問題 (H29, 11/17) 担当：栗本

- 以下の大問 **1** (**必答:40 点**) と，**{2，3，4}** (**各 30 点**) から **2** つを選択して，合計大問 **3** つに解答せよ．(**2,3,4** の **3** つとも選択してはいけない．そうした場合，選択問題は採点せずに全て **0** 点とする．)
- 全ての解答用紙に氏名と学籍番号を記入すること。
- 問題 **2,3,4** の解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．結果だけの解答、途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．
- 結果が単なる数値かベクトルか行列かをはっきりと区分して示すこと．(たとえば，単に $0$ と書いてあったら数値の $0$ とみなす．零ベクトルなら $\vec{0}$，零行列なら $O$ のように記すか，成分を全部記すこと．)

> 以下の問題中で，$\vec{r}=(x,y,z)$, $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ とし，$i$ は $i^2=-1$ となる虚数単位，$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,,\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,,\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

1. $\boxed{\text{必答}}$ 次の計算を行え．( (b), (d), (e), (f): 7 点，(a), (c): 6 点) <u>この問題の解答は結果のみを記すこと</u>．小問 **(b)**，**(c)**，**(d)** には，あなたの学籍番号の末尾 **2** 桁を $ab$ とした場合の $a$, $b$ の値を用いよ．たとえば学籍番号が **11740173** なら $a=7$, $b=3$ である．

   (a) $(1,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(b) $\det\begin{pmatrix} 0 & a+b & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 8-a & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{w}=(a-i,\ 2i,\ b-5)$ として $\vec{w}$ の大きさを求めよ．

   (d) 勾配: $\nabla\{e^{-(7-a)r}\}$　(e) 発散: $\nabla\cdot(r^2\vec{r}\,)$　(f) 回転: $\nabla\times(r^2x,\ 0,\ 0)$

2. 行列 $M=\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

   (a) $M$ の固有値 (2 つある) を求めよ．(6 点)

   (b) $M$ を対角化する行列 $U$ ($U^{-1}MU$ が対角行列になる行列) を求めよ．(10 点)

   (c) 自然数 $n$ に対して $(U^{-1}MU)^n=U^{-1}M^nU$ を示せ．(4 点)

   (d) $\left(\dfrac{M}{100}\right)^n=\dfrac{1}{4^{n-1}}\left(\dfrac{M}{100}\right)$ を示せ．(10 点)

3. 3 次元のデカルト座標から球座標への変換を $x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$ ($0\le\theta\le\pi$，$0\le\phi<2\pi$) で定義する．以下の問いに答えよ．

   (a) $\vec{r}=(x,y,z)$ の各成分を球座標を用いて表し，$\vec{A}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}$，$\vec{B}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$，$\vec{C}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}$ を $r$，$\theta$，$\phi$ を用いて表わせ．(10 点)

   (b) $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ はそれぞれが互いに直交すること (内積の値が 0 になること) を示せ．(10 点)

   (c) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ を 計算せよ．(10 点)

4. ベクトル $\vec{A}=(S\cos(kz-\omega t)\ ,\ 0\ ,\ 0)$ ( $S$，$k$，$\omega$ は正の定数) に対して，新しいベクトル $\vec{E}$ と $\vec{B}$ を $\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ , $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ で定義する．以下の問いに答えよ．

   (a) $\vec{E}$ と $\vec{B}$ を求めよ．(10 点)

   (b) $\vec{E}\cdot\vec{B}$ を求めよ．(5 点)

   (c) $\vec{E}\times\vec{B}$ を求めよ．(5 点)

   (d) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=c^2(\nabla\cdot\nabla)\vec{A}$ ($c$ は正の実数定数) が成立するとき，$c$ を $k$ と $\omega$ で表せ．(10 点)

以上

## 解答例

1. (a)

$$(1,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 3+0-5=-2$$

(b)

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 0 & a+b & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 8-a & -1 \end{pmatrix} &= 0+3(a+b)+(-2)(8-a)-0-0-2(a+b) \\ &= a+b-16+2a = 3a+b-16 \end{aligned}$$

(c) $\vec{w}=(a-i,\ 2i,\ b-5)$ より

$$\begin{aligned} |\vec{w}|^2 &= (\vec{w})^\dagger\vec{w} = |a-i|^2+|2i|^2+|b-5|^2 = a^2+1+4+(b-5)^2 = a^2+5+(b-5)^2 \\ |\vec{w}| &= \sqrt{a^2+5+(b-5)^2} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \nabla\{e^{-(7-a)r}\} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)e^{-(7-a)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\ \frac{\partial}{\partial x}e^{-(7-a)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} &= -(7-a)e^{-(7-a)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ &= -(7-a)e^{-(7-a)r}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}2x = -(7-a)e^{-(7-a)r}\frac{x}{r} \\ & \quad \text{同様に } y,\ z \text{ 成分も計算して} \\ \nabla\{e^{-(7-a)r}\} &= -(7-a)e^{-(7-a)r}\frac{1}{r}(x,y,z) = -(7-a)\frac{\vec{r}}{r}e^{-(7-a)r} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(r^2\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2+z^2)x]+\frac{\partial}{\partial y}[(x^2+y^2+z^2)y]+\frac{\partial}{\partial z}[(x^2+y^2+z^2)z] \\ &= (x^2+y^2+z^2)+2x^2+(x^2+y^2+z^2)+2y^2+(x^2+y^2+z^2)+2z^2 \\ &= 5(x^2+y^2+z^2) = 5r^2 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \nabla\times(r^2x,\ 0,\ 0) &= (\frac{\partial 0}{\partial y}-\frac{\partial 0}{\partial z},\ \frac{\partial(r^2x)}{\partial z}-\frac{\partial 0}{\partial x},\ \frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial(r^2x)}{\partial y}) \\ &= (0,\ \frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)x\},\ -\ \frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)x\}) \\ &= (0,\ 2xz,\ -2xy) \end{aligned}$$

---

### 学習上でのコメント

- 行列とベクトルの積の定義，行列式の定義をしっかり確認すること．
- スカラーとベクトルの違いを認識すること．結果がスカラーになるのか，ベクトルになるのか，= の右辺と左辺が同じ形式 (スカラー，ベクトル) になっているかに留意せよ．
- 複素ベクトルの大きさの計算には $(\vec{v})^\dagger\vec{v} = |v_1|^2+|v_2|^2+\cdots$ を用いること．
- 通常の微分計算を，計算間違いしないように丁寧に行うこと．

2.

(a) 固有値を $\lambda$ とすると，$|M-\lambda I|=0$ より

$$0=\begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-25\lambda+144-144=\lambda(\lambda-25)$$

よって固有値 $\lambda=0,\ 25$.

(b) 固有値 $\lambda$ に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_\lambda=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とすると，

$$M\vec{v}_\lambda=\lambda\vec{v}_\lambda\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16s-12t \\ -12s+9t \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$ のとき，$4s=3t$．よって，$\vec{v}_0=N_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ($N_1$ は規格化定数)．規格化条件より

$$1=(3N_1)^2+(4N_1)^2=25N_1^2\ \Rightarrow\ N_1=\frac{1}{5}$$

規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\qquad \text{(絶対値が 1 の複素数が全体にかかっていても可)}$$

$\lambda=25$ のとき，$3s=-4t$．よって，$\vec{v}_{25}=N_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($N_2$ は規格化定数)．規格化条件より

$$1=(-4N_2)^2+(3N_2)^2=25N_2^2\ \Rightarrow\ N_2=\frac{1}{5}$$

規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\qquad \text{(絶対値が 1 の複素数が全体にかかっていても可)}$$

これらを並べた行列を $U$ とすると，$U=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$．これが $M$ を対角化する行列となる．
(列の順序が変わっていても可)

---

(以下は結果のチェック．試験の解答に記していなくても可)
この $U$ は

$$U^TU\ =\ \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

を満たし，$U^T=U^{-1}$ の直交行列 (成分が実数のユニタリー行列) となっている．また

$$\begin{aligned} U^{-1}MU\ &=\ \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 0 & 75 \end{pmatrix} \\ &=\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって $M$ を対角化する．
**(注)** 固有ベクトルを規格化しなくても $M$ を対角化することはできるが，$U^{-1}MU$ の対角成分が固有値を定数倍したものになってしまうので注意せよ．

(c)

$$\begin{aligned}(U^{-1}MU)^n &= (U^{-1}MU)(U^{-1}MU)\cdots(U^{-1}MU) = U^{-1}M(UU^{-1})M(UU^{-1})\cdots(UU^{-1})MU \\ &= U^{-1}M^nU\end{aligned}$$

(d) (c) を用いて

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{100}\right)^n &= \left(\frac{1}{100}\right)^n U\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}^n U^{-1} = U\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}^n U^{-1} = U\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/4^n\end{pmatrix}U^{-1} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1/4^{n-1} & 3/4^n\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}1/4^{n-2} & -3/4^{n-1}\\ -3/4^{n-1} & 9/4^n\end{pmatrix} = \frac{1}{25\cdot 4^n}\begin{pmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{M}{100}\right)\end{aligned}$$

[別解]

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{100}\right)^2 &= \frac{1}{10000}\begin{pmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{10000}\begin{pmatrix}16^2+12^2 & -12(16+9)+\\ -12(16+9) & 12^2+9^2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10000}\begin{pmatrix}4^2(4^2+3^2) & -12(4^2+3^2)\\ -12(4^2+3^2) & 3^2(4^2+3^2)\end{pmatrix} = \frac{25}{10000}\begin{pmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{100}\right)\end{aligned}$$

これを用いて

$$\left(\frac{M}{100}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{100}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^2}\left(\frac{M}{100}\right)^{n-2} = \cdots = \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{M}{100}\right)$$

3. (a) $\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$ より

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) \\ \vec{B} &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (r\cos\theta\cos\phi,\ r\cos\theta\sin\phi,\ -r\sin\theta) \\ \vec{C} &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = (-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi,\ 0)\end{aligned}$$

(b) (a) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos\theta = r\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \vec{B}\cdot\vec{C} &= -r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\sin\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\sin\phi = 0 \\ \vec{A}\cdot\vec{C} &= -r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + r\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi = 0\end{aligned}$$

よって，内積の値が 0 なので，$\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ は互いに直交している．

(c) (a) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\vec{B}\times\vec{C} &= (r^2\sin^2\theta\cos\phi,\ r^2\sin^2\theta\sin\phi,\ r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi) \\ &= (r^2\sin^2\theta\cos\phi,\ r^2\sin^2\theta\sin\phi,\ r^2\sin\theta\cos\theta) \\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) &= r^2\sin^3\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta = r^2\sin\theta\end{aligned}$$

---

**(注)** 定義から，$\vec{A}\,dr$，$\vec{B}\,d\theta$，$\vec{C}\,d\phi$ はそれぞれ，$r$，$\theta$，$\phi$ を微小変化させた場合での位置ベクトル $\vec{r}$ の変化を表している．(b) から変化の方向が直交していることがわかる．(c) で計算した $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ の絶対値は $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ がつくる立体の体積であり，重積分での変数変換で $\int\cdots dxdydz = \int\cdots r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ になることを示している．

4. (a)

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -((-\omega)S(-)\sin(kz-\omega t),\ 0,\ 0) = (-\omega S\sin(kz-\omega t),\ 0,\ 0) \\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = (0,\ \frac{\partial}{\partial z}S\cos(kz-\omega t),\ -\frac{\partial}{\partial y}S\cos(kz-\omega t)) \\
&= (0,\ -kS\sin(kz-\omega t),\ 0)
\end{aligned}
$$

(b) (a) の結果より

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = (-\omega S\sin(kz-\omega t),\ 0,\ 0)\cdot(0,\ -kS\sin(kz-\omega t),\ 0) = 0+0+0 = 0$$

(c) (a) の結果より

$$\vec{E}\times\vec{B} = (-\omega S\sin(kz-\omega t),\ 0,\ 0)\times(0,\ -kS\sin(kz-\omega t),\ 0) = (0,\ 0,\ \omega k S^2\sin^2(kz-\omega t))$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} &= (-\omega^2 S\cos(kz-\omega t)\ ,\ 0\ ,\ 0) \\
c^2(\nabla\cdot\nabla)\vec{A} &= c^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})(S\cos(kz-\omega t)\ ,\ 0\ ,\ 0) \\
&= (-c^2k^2S\cos(kz-\omega t)\ ,\ 0\ ,\ 0)
\end{aligned}
$$

両者が一致するとき $\omega^2 = c^2k^2$．$\omega$，$c$，$k$ はいずれも正の定数なので，$c = \dfrac{\omega}{k}$

---

**(注)** ここの $\vec{A}$ は電磁気学でベクトルポテンシャルとよばれ，理論的には電場，磁場よりも基本的なものである．この問題では正の $z$ 方向に伝搬する平面波の電磁波を表している．電磁波の正体は，その進行方向に垂直な電場と磁場が変化しながら空間を伝わっていくものであり，(b) から電場と磁場も互いに垂直であることがわかる．(c) で計算したものはポインティングベクトルとよばれ，電磁波が伝えるエネルギーと運動量を求めるのに用いる．(d) で与えた方程式は波動方程式であり，電磁波が波として空間を伝わる様を表す．ここで現れた $c$ は波の速さである．$\omega$ は角振動数で，振動数 $\nu$ と $\omega = 2\pi\nu$ の関係にある．$k$ は波数とよばれ，波長 $\lambda$ と $k = 2\pi/\lambda$ の関係にある．問題で求めた関係式は $c = \omega/k = \nu\lambda$ となり，波の速さと振動数，波長の関係を表している．