物理数学 A 中間試験問題 (H28, 11/18) 担当：栗本

- **以下の大問 1 (40 点) と，{2，3，4} (各 30 点) から 2 つを選択して，合計大問 3 つに解答せよ．**
- **全ての解答用紙に氏名と学籍番号を記入すること。**
- **問題 2,3,4 の解答は物理学科の同級生に説明するつもりで論理をはっきりとさせて答えよ．結果だけの解答、途中の計算が不明な解答はたとえ答が合っていても大幅な減点とする．**
- **結果が単なる数値かベクトルか行列かをはっきりと区分して示すこと．(たとえば，単に 0 と書いてあったら数値の 0 とみなす．零ベクトルなら $\vec{0}$，零行列なら O のように記すか，成分を全部記すこと．)**
- **問題 1 の小問 (1),(2) と問題 2 中の a, b には，あなたの学籍番号の末尾 2 桁を ab とした場合の a, b の値を用いよ．たとえば学籍番号が 11640174 なら $a = 7$, $b = 4$ である．オープンクラス受講生は $a = 6$, $b = 3$ とせよ．**

以下の問題中で，$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$, i は $i^2 = -1$ となる虚数単位,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

であり，行列 A に対し A^T は転置行列，$A^\dagger$ はエルミート共役をとった行列である．

1. $\boxed{\textbf{必答}}$ 次の計算を行え．((1), (4), (5), (6): 7 点，(2), (3): 6 点) **この問題の解答は結果のみを記すこと．**

   (1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 - b \\ -i \\ 3i \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ (a+2) \\ i \end{pmatrix}$ として $(\vec{v})^\dagger \vec{w} - (\vec{w})^\dagger \vec{v}$

   (2) $\vec{r} = (7 - a,\ -1,\ 0)$, $\vec{s} = (b + 1,\ 0,\ 1)$ として $\vec{r} \times \vec{s}$.　　(3) $i\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

   (4) 勾配: $\nabla(e^{-r^2})$　　(5) 発散: $\nabla \cdot \{\vec{r} \sin(r^2)\}$　　(6) 回転: $\nabla \times (z,\ x,\ y)$

2. エルミート行列 $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & (8-a) & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

   (1) 固有値を全て求めよ．(3 つある) (12 点)

   (2) H を対角化するユニタリー行列を求めよ．
   (求めた行列がユニタリー行列であることと，それが H を対角化することは計算で示さなくてよい．それを記して間違いがあれば減点する．) (18 点)

3. 時間 t に依存して変化する位置ベクトル $\vec{r}$ を考える．$\vec{r}$ は運動方程式 $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U(r)$ (m は正の定数) に従うものとする．ここで U は $r = |\vec{r}|$ のみに依存する関数である．

   (1) $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ とするとき，$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ を示せ．(5 点)

   (2) $\nabla U(r)$ は $\vec{r}$ に平行であることを示し，(1) の結果と運動方程式から $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ を示せ．(15 点)

   (3) $\vec{L}$ の向きを z 軸の正の方向にとるとき，$\vec{r}$ と $\vec{p}$ は xy 平面に平行であることを示せ．(5 点)

   (4) $\vec{r}$ を xy 平面内にとり，その z 座標の値を 0 とする．$\vec{p} = m(0, 0, \omega) \times \vec{r}$　(ω は定数) のとき，$\vec{L}$ の大きさを r と問題文中で与えた定数を用いて表わせ．(5 点)

4. 原点を中心とする半径 a の球を考え，その表面と内部を含めた領域を D と記す．n を 0 以上の整数とし，関数 f を $f(s) = s^n$ で定義する．このとき領域 D での以下の重積分を求めよ．(30 点)

$$\int\!\!\int\!\!\int_D z^2 f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ )\ dxdydz$$

以上

解答例

1. (1)

$$\begin{aligned}(\vec{v})^\dagger\vec{w}-(\vec{w})^\dagger\vec{v} &= (10-b,i,-3i)\begin{pmatrix}7\\(a+2)\\i\end{pmatrix}-(7,a+2,-i)\begin{pmatrix}10-b\\-i\\3i\end{pmatrix}\\ &= \{7(10-b)+(a+2)i+3\}-\{7(10-b)-(a+2)i+3\}=2(a+2)i\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\vec{s} &= (7-a,\ -1,\ 0)\times(b+1,\ 0,\ 1)\\ &= ((-1)\times 1-0\times 0,\ 0\times(b+1)-(7-a)\times 1,\ (7-a)\times 0-(-1)\times(b+1))\\ &= (-1,\ a-7,\ b+1)\end{aligned}$$

(3)

$$i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{aligned}\nabla(e^{-r^2}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-(x^2+y^2+z^2)},\frac{\partial}{\partial y}e^{-(x^2+y^2+z^2)},\frac{\partial}{\partial z}e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right)\\ &= \left(-2xe^{-(x^2+y^2+z^2)},-2ye^{-(x^2+y^2+z^2)},-2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}\right)\\ &= -2\vec{r}e^{-r^2}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\{\vec{r}\sin(r^2)\} &= \frac{\partial}{\partial x}[x\sin(x^2+y^2+z^2)]+\frac{\partial}{\partial y}[y\sin(x^2+y^2+z^2)]+\frac{\partial}{\partial z}[z\sin(x^2+y^2+z^2)]\\ &= \sin(x^2+y^2+z^2)+2x^2\cos(x^2+y^2+z^2)\\ &\quad+\sin(x^2+y^2+z^2)+2y^2\cos(x^2+y^2+z^2)\\ &\quad+\sin(x^2+y^2+z^2)+2z^2\cos(x^2+y^2+z^2)\\ &= 3\sin(r^2)+2r^2\cos(r^2)\end{aligned}$$

(6)

$$\nabla\times(z,\ x,\ y) = (\frac{\partial y}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z},\ \frac{\partial z}{\partial z}-\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})=(1,1,1)$$

2. 以下 $8-a=p$ とする．

(1) 固有値を λ とすると，$|H-\lambda I|=0$ より

$$0=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&-i\\0&p-\lambda&0\\i&0&0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(p-\lambda)-(p-\lambda)=(\lambda^2-1)(p-\lambda)$$

よって $\lambda=-1,\ 1,\ p$．すなわち，固有値は -1，1 と $p\ (=8-a)$．

(2) 固有値 λ に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ とすると，

$$H\vec{v}_\lambda = \lambda\vec{v}_\lambda \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & p & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ のとき，$-iu = s$，$pt = t$ すなわち，$s = -iu$，$t = 0$ よって，規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{(絶対値が 1 の複素数が全体にかかっていても可)}$$

$\lambda = -1$ のとき，$-iu = -s$，$pt = -t$ すなわち，$s = iu$，$t = 0$ よって，規格化された固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(絶対値が 1 の複素数が全体にかかっていても可)}$$

$\lambda = p$ のとき， $-iu = ps$ かつ $is = pu$．これらから $u = ips = p^2 u$．$p > 1$ なので，この式が成立するには $u = 0$．同様にして $s = 0$．よって，規格化された固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(絶対値が 1 の複素数が全体にかかっていても可)}$$

これらを並べた行列を U とすると，$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$．これが H を対角化するユニタリー行列となる．(列の順序が変わっていても可)

(以下は結果のチェック．試験の解答に記していなくても可)
この U は

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

を満たし，ユニタリー行列となっている．また

$$\begin{aligned} U^\dagger H U &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & p & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & p \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって H を対角化する．

3. (1)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ここで，平行なベクトルどうしのベクトル積は 0 になるので，$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$ であることを用いた.

(2)

$$\nabla U(r) = (\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z})$$

U は r だけに依存しているので

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\ \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x)\ \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{x}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}$$

同様に計算して

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}$$

よって

$$\nabla U(r) = (x,\ .y\ ,z)\frac{1}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\vec{r}}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}$$

この結果より，$\nabla U(r)$ は $\vec{r}$ に平行である．これと (1) の結果，運動方程式を用いて

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}\times\{-\nabla U(r)\} = \vec{r}\times\{-\frac{\vec{r}}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}\} = \vec{0}$$

ここで $\vec{r}\times\vec{r}=\vec{0}$ を用いた.

(3) $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ なので，ベクトル積の定義より $\vec{L}$ は $\vec{r}$ および $\vec{p}$ と垂直である．$\vec{L}$ を z 軸の向きにとると，$\vec{r}$ および $\vec{p}$ は z 軸に垂直になるので，xy 平面に平行である.

(4) 題意より $\vec{r}=(x,y,0)$ となり，これと $\vec{p}=m(0,0,\omega)\times\vec{r}$ を $\vec{L}$ の定義に代入して

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times\{m(0,0,\omega)\times\vec{r}\} = (x,y,0)\times\{(0,0,m\omega)\times(x,y,0)\}\\ &= (x,y,0)\times(-m\omega y, m\omega x, 0) = (0,0,m\omega(x^2+y^2)) = (0,0,m\omega r^2)\end{aligned}$$

よって，$\vec{L}$ の大きさは $mr^2\omega$.

4. 3 次元デカルト座標を球座標で表して

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\quad y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\quad z = r\cos\theta\quad (0\le r,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi<2\pi)$$

このときヤコービアンは

$$J = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix} = r^2\sin\theta \ge 0$$

よって

$$\begin{aligned}\int\int\int_D z^2 f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\ dxdydz &= \int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r\cos\theta)^2 f(r) r^2\sin\theta d\phi d\theta dr\\ &= 2\pi\int_0^a\int_0^\pi r^{n+4}\cos^2\theta\sin\theta d\theta dr = 2\pi\int_0^a r^{n+4}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi dr\\ &= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{r^{n+5}}{n+5}\right]_0^a = \frac{4\pi}{3(n+5)}a^{n+5}\end{aligned}$$