

物理学演習 B [発展コース] レポート問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

この問題の解答をレポートとして、11/10(水)までに提出すること。提出先: A218室のドアポスト

- 2次元で考え、極座標 ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) で波動関数が $Ne^{-kr^2/2}$ (N, k は正の実数定数) で与えられているとする。
 - 規格化条件から N を求めよ。
 - x の期待値 $\langle x \rangle$ と y の期待値 $\langle y \rangle$ を求めよ。
 - r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。
 - $\langle x \rangle$ と $\langle y \rangle$ から $\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2$ を計算した結果は $\langle r \rangle^2$ と一致しない。この理由につき考察せよ。
- ハミルトニアン の行列表示が $H = k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (k は実定数) で与えられている。これに対応する波動関数をベクトルで表して $\psi = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$ と記す。ここで $a_1(t), a_2(t)$ は規格化条件 $|a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 = 1$ を満たしているものとする。以下の問いに答えよ。
 - $a_1(t), a_2(t)$ の満たす方程式をシュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ から求めよ。
 - 初期条件 $a_1(0) = 1, a_2(0) = 0$ の下で前問で得られた方程式を解き、 $|a_2(t)|^2$ を求めよ。
- 以下の関係式を示せ
 - $[J_+, J_-] = 2J_z$
 - $[J_+, (\vec{J})^2] = 0$
 - $[J_-, (\vec{J})^2] = 0$
 - $J_x^2 = \frac{1}{4}(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+)$
 - $J_x^2 - J_y^2 = \frac{1}{2}(J_+^2 - J_-^2)$
- 水素原子の基底状態 (最もエネルギーが低い状態) を考える。水素原子核 (スピン 1/2) のスピン演算子 \vec{s}_p と電子のスピン演算子 \vec{s}_e を用いて $A \vec{s}_p \cdot \vec{s}_e$ (A は正の定数) と表される項がハミルトニアンに加わった場合、基底状態のエネルギー準位はどう変化するか