

## 物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

近似法 (注: 以下の問題では「量子力学 II」で学ぶ内容が含まれている.)

- 1次元の調和振動子に摂動として  $\hat{H}_1 = cx^4$  ( $c$  は正の定数) が加わった場合に、基底状態のエネルギーが1次の摂動でどれだけずれるか求めよ.
- 基底状態 (最もエネルギーが低い状態) を  $|0\rangle$  と記す. 1次の摂動  $\langle 0|\hat{H}_1|0\rangle$  が0になるとき、2次の摂動の効果によってエネルギーは摂動が無い場合よりも低くなることを示せ.
- 独立な固有状態が2つしかない場合で、エネルギー固有値に縮退がある場合につき、1次の摂動を求めよ.
- 一様な電場中に水素原子が存在する場合、主量子数  $n = 2$  の状態のエネルギー準位の変化を摂動の1次まで求めよ.
- 規格化された任意の関数  $f$  でハミルトニアン  $H$  の期待値  $\langle f|H|f\rangle$  を計算した場合、その値が最小になるのは  $f$  が  $H$  の固有関数のうちの基底状態に一致するときであることを示せ.
- 1次元調和振動子で基底状態の波動関数の候補 (試行関数) として  $\psi = Ne^{-ax^2}$  ( $N$  は定数) をとり、ハミルトニアンの期待値が最小になる  $a$  を求めよ.
- 水素原子のハミルトニアン  $H$  は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{ke^2}{r}, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

で与えられる. ここで、 $m$  は電子の質量、 $-e$  は電子の電荷、 $k$  は正の実数定数である.  $N$  と  $a$  を正の実数定数として、水素原子の基底状態の波動関数の候補 (試行関数) として  $\psi = Ne^{-r/a}$  ( $N$  は定数) をとり、 $H$  の期待値が最小になる  $a$  を求めよ.

8. 水素原子の波動関数は、主量子数  $n$ 、軌道角運動量量子数  $l$  と磁気量子数  $m$  を用いて  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$  と記すことができる. ここで  $(r, \theta, \phi)$  は3次元の極座標であり、波動関数で変数  $\phi$  に関する依存性は  $e^{im\phi}$  で与えられる. 一つの状態  $(n, l, m)$  から別の状態  $(n', l', m')$  への遷移確率が、以下の量

$$|\langle \psi_{n'l'm'} | \mathbf{r} | \psi_{nlm} \rangle|^2 \equiv \sum_{q=x,y,z} |\langle \psi_{n'l'm'} | q | \psi_{nlm} \rangle|^2$$

に比例するとする. 次の問いに答えよ.

- (a) 位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  を極座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いて表せ.
- (b)  $\langle \psi_{n'l'm'} | x | \psi_{nlm} \rangle$  が0にならないためには、 $m$  について少なくともどのような条件が必要か.
- (c)  $\langle \psi_{n'l'm'} | y | \psi_{nlm} \rangle$  が0にならないためには、 $m$  について少なくともどのような条件が必要か.
- (d)  $\langle \psi_{n'l'm'} | z | \psi_{nlm} \rangle$  が0にならないためには、 $m$  について少なくともどのような条件が必要か.