

物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

原子構造

1. 2粒子の場合に重心座標 \vec{R} と相対座標 \vec{r} を導入した場合で以下を示せ.

$$\nabla_1 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \nabla_R + \nabla_r, \quad \nabla_2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \nabla_R - \nabla_r$$
$$\frac{1}{m_1} \Delta_1 + \frac{1}{m_2} \Delta_2 = \frac{1}{M} \Delta_R + \frac{1}{\mu} \Delta_r$$

2. 一次元で、質量 m_1 と m_2 の粒子がバネ定数 k のバネで接続されている系で、相対運動の古典力学と量子力学を論ぜよ.

3. 陽電子は電子と質量が同じで電荷の符号が逆の粒子である. 電子と陽電子一つずつがクーロン力で束縛しあっている状態をポジトロニウムという.

(a) ポジトロニウムで電子の換算質量が実際の電子の質量から何%ずれるかを求めよ.

(b) ポジトロニウムのエネルギー準位を求めよ.

(c) 軌道角運動量が0の場合 (s 軌道の場合), ポジトロニウムの全角運動量の取りうる値を求めよ.

4. 磁場中の原子には、ハミルトニアンに $-\gamma \vec{B} \cdot \vec{L}$ (γ は定数. \vec{B} は磁場ベクトル. \vec{L} は軌道角運動量演算子) という項が加わる. \vec{B} の方向を z 軸にとり、この項の存在により水素型原子のエネルギー準位がどう変化するかを論ぜよ. (ゼーマン効果)

5. 電子にスピンの存在することにより、原子のハミルトニアンには $\mu \vec{L} \cdot \vec{s}$ (μ は定数. \vec{L} は軌道角運動量演算子. \vec{s} は電子のスピン演算子) という項が加わる. この項の存在により水素型原子のエネルギー準位がどう変化するかを論ぜよ. (スピン-軌道相互作用)

6. 同種粒子を考え、1つの粒子についての波動関数が $\phi_n(x_1)$ (n は量子数) で与えられるとする. 系全体の波動関数が

$$\phi_{n_1}(x_1) \phi_{n_2}(x_2) \cdots \phi_{n_N}(x_N)$$

といった個々の粒子の波動関数の積、およびその線形結合で与えられる場合

(a) $N = 2$ でボーズ粒子の場合の系全体の波動関数を書け

(b) $N = 2$ でフェルミ粒子の場合の系全体の波動関数を書け

(c) $N = 3$ でボーズ粒子の場合の系全体の波動関数を書け

(d) $N = 3$ でフェルミ粒子の場合の系全体の波動関数を書け

7. フェルミ粒子が奇数個集まった束縛状態はフェルミ粒子としてふるまい、偶数個集まった束縛状態はボーズ粒子として振る舞うことを示せ. (全系のとりうる角運動量の値を求めればよい.)