

# 物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

## 角運動量

1.

$$M_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義した場合に、

- (a)  $M_x, M_y, M_z$  間の交換関係を求めよ.
- (b)  $M_z$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (c)  $\vec{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.

2. ある系のハミルトニアン演算子  $H$  が次で与えられている.

$$H = aJ_x^2 + bJ_y^2 + cJ_z^2$$

ここで  $a, b, c$  は正の定数であり,  $J_x, J_y, J_z$  は下の交換関係を満たす角運動量演算子である. (簡単のため  $\hbar = 1$  としてある.) 以下の問いに答えよ.

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y$$

- (a)  $(\vec{J})^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  と  $J_z$  が可換であること, すなわち  $[(\vec{J})^2, J_z] = 0$  を示せ.
- (b) 新しい演算子  $J_{\pm}$  を  $J_+ = J_x + iJ_y, J_- = J_x - iJ_y$  で定義する.  $J_x^2$  を  $J_+$  と  $J_-$  だけを用いて表せ.
- (c)  $J_+J_- = (\vec{J})^2 - J_z^2 + J_z$  と  $J_-J_+ = (\vec{J})^2 - J_z^2 - J_z$  を示せ.
- (d)  $(\vec{J})^2$  と  $J_z$  の同時固有状態を  $|j, m\rangle$  で表す.  $a = b \neq c$  のとき,  $|j, m\rangle$  は  $H$  の固有状態であることを示し, その固有値を求めよ.
- (e)  $a, b, c$  の値が全て異なる場合,  $j = 1/2$  の状態に対して  $H$  のとりうる固有値を全て求めよ.

3. 二つの独立な角運動量演算子  $\vec{J}_1$  と  $\vec{J}_2$  を考えたとき,  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$  とすると,  $(\vec{J})^2, J_z, (\vec{J}_1)^2, (\vec{J}_2)^2$  が互いに交換可能であることを示せ.

4.  $|l_1, l_1\rangle|l_2, l_2\rangle$  が  $(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$  の固有値  $(l_1 + l_2)(l_1 + l_2 + 1)$  の固有状態になっていることを示せ.

5. 大きさ 1 と 1/2 の 2 つの角運動量を合成した場合にできる全角運動量の大きさと  $z$  成分の値につき, すべての可能な場合を尽くせ.