物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

量子力学の一般原理，ポテンシャル問題

1. 運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$ と何回でも微分可能な関数 $\psi(x)$ につき，以下が成立することを示せ．
$$e^{ia\hat{p}/\hbar}\psi(x) = \psi(x+a) \quad (a \text{ は実数定数})$$

2. 波動関数が $\Psi(t,\vec{r}) = \sum_n a_n(t)\psi_n(\vec{r})$ と完全規格直交系 $\{\phi_n\}$ で展開されているとする．このとき，時間に依存するシュレーディンガー方程式 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$ を，$\hat{H}$ の行列表現 H_{mn} と a_n との間の方程式に書き直せ．

3. 1 次元調和振動子の量子力学が分かっているとして，3 次元調和振動子について考察せよ．

4. 1 次元での質量 m を持つ自由粒子の振る舞いを量子力学的に考える．以下の問いに答えよ．

   (a) 運動量 p を固有値として持つ規格化された運動量固有関数が
   $$\phi_p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipq/\hbar}$$
   となることを示せ. ただし, 固有関数の規格化は以下で与えられているものとする.
   $$\int_{-\infty}^{\infty} dq\ \phi^*_{p'}(q)\phi_p(q) = \delta(p-p')$$

   (b) 上記の運動量固有関数が自由粒子のハミルトニアンの固有関数であることを示し, エネルギー固有値 E を p を用いて表せ.

   (c) 任意の波動関数 $\psi(q)$ は, 運動量固有関数の完全性により, 複素数 c_p を係数として
   $$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\ c_p\phi_p(q)$$
   と展開することができる. $\psi(q) = \delta(q)$ のときの c_p を求めよ.

5. 1 次元での粒子のふるまいを量子力学的に考える．ポテンシャル $V(x)$ が
$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le L) \\ \infty & (x < 0 \text{ または } L < x) \end{cases} \qquad (L \text{ は正の定数})$$
で与えられている場合，粒子の質量を m として以下の問いに答えよ．

   (a) 1 つの粒子がとりうるエネルギー固有値が
   $$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
   で与えられることを示し，それに対応する規格化された波動関数を求めよ．

   (b) 粒子を電子とした場合，この系に電子が 5 つ入った状態で，全体のエネルギーが最も低くなる場合のエネルギーの値を E_n を用いて表せ．ただし，電子はスピン 1/2 のフェルミ粒子であり，電子間に働く力は無視できるものとする．

   (c) 粒子がボーズ粒子の場合，この系に粒子が 5 つ入った状態で，全体のエネルギーが最も低くなる場合のエネルギーの値を E_n を用いて表せ．ただし，粒子間に働く力は無視できるものとする．