物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

シュレーディンガー方程式

1. 質量 m の粒子の一次元の運動で位置エネルギーが $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (ω は正の定数) で与えられているとする．波動関数の形を $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}e^{-ax^2}$ と仮定して，シュレーディンガー方程式に代入し，以下の問いに答えよ．

   (a) エネルギー E が定数となるために a がとるべき値を求めよ．

   (b) 上で求めた a の値を用いて E を計算せよ．

2. 1 次元の束縛状態には縮退が無いことを示す．

   (a) 同じエネルギー E を与える波動関数 ψ_1, ψ_2 があった場合，ψ_1, ψ_2 それぞれが満たす，時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書き下せ．

   (b) (a) の結果から次式が成立することを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left[\psi_2\frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1\frac{d\psi_2}{dx}\right] = 0$$

   (c) (b) の結果から ψ_1 と ψ_2 は比例していることを示せ．

3. 3 次元で運動している質量 m の粒子の波動関数を $\psi(t,\vec{r})$ として，確率密度 $\rho(t,\vec{r})$ と確率の流れの密度 $\vec{j}(t,\vec{r})$ をそれぞれ次で定義する：

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\,\psi\right].$$

   これらが確率の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

   を満たすことを示せ．

4. 一次元で，以下のポテンシャルに束縛されている粒子につき考察せよ．ただし，V_0 は正で有限の値である．

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -V_0 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

5. 一辺の長さが a の立方体に閉じこめられた 質量 m の粒子につき，その固有関数とエネルギーを求めよ．