

物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

物理でよく扱われる系の熱・統計力学的取扱い

1. 粒子数 N が変化する場合、系がエネルギー E , 粒子数 N をとる確率は、化学ポテンシャルを μ として $e^{-(E-\mu N)/kT}$ に比例する。(グランドカノニカル分布) このとき大分配関数 Ξ は

$$\Xi = \sum_N \sum_i e^{-(E_i - \mu N)/kT} = \sum_N Z_N e^{\mu N/kT}$$

(Z_N は粒子数が N の場合の分配関数) で定義される。以下を示せ

$$(a) \langle N \rangle = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi \quad (b) \langle E - \mu N \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \Xi \quad (c) \langle P \rangle = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi$$

2. 質量 m の粒子からなる温度 T , 粒子数密度 n の古典的な単原子理想気体の化学ポテンシャルを求めよ。

- (a) 化学ポテンシャル μ はエントロピー S またはヘルムホルツの自由エネルギー F から、以下の関係式で得られることを示せ。

$$\mu = -T \frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial N}$$

- (b) 単原子理想気体のエントロピーまたはヘルムホルツの自由エネルギーから化学ポテンシャルを計算せよ。

3. 空洞輻射について考える。

- (a) 体積 V の球対称な空洞内に閉じこめられた、振動数が ν から $\nu + d\nu$ の間にある電磁波 (光子) の状態数 $N(\nu)d\nu$ を求めよ。

- (b) (a) の結果と、光子はボーズ・アインシュタイン分布に従うことから、振動数 ν から $\nu + d\nu$ の電磁波の単位体積あたりのエネルギー $u(\nu)d\nu$ (プランクの輻射式) を表せ。

- (c) (b) の結果が $h\nu/kT \ll 1$ の場合 (レーリー・ジーンズの輻射式) と $h\nu/kT \gg 1$ の場合 (ウィーンの輻射式) とでどうなるかを示せ。

- (d) 輻射の全エネルギーは温度 T の 4 乗に比例することを示せ。(ステファン・ボルツマンの法則)

4. N 個の自由電子 (質量 m) からなる状態をフェルミ・ディラック分布に従う理想気体と考える。この系の体積を V とし、 $T = 0$ でのこの系の化学ポテンシャルを求めよ。