

物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

カノニカル分布とその応用

1. 全エネルギー E を持つ孤立系を、その一部 (系 A) と大部分の残り (系 B) に分けて考え、系全体は熱平衡にあるとする。このとき、系 A がエネルギー E_A ($E_A \ll E$) をとる確率は $e^{-E_A/(kT)}$ に比例することを示せ。
2. 分配関数の定義 $Z = \sum_n e^{-E_n/(kT)}$ から出発してエネルギーの平均値が $\langle E \rangle = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} (-k \ln Z) \right]$ で与えられることを示せ。
3. 互いに独立な N 個の調和振動子からなる系をカノニカル分布で扱い、系の内部エネルギーと比熱を求めよ。(ミクロカノニカル分布での演習問題の間1をカノニカル分布で考える。)
4. エネルギーが $-\epsilon$, ϵ の2つの量子状態をとる温度 T の N 個の粒子の系があり、粒子は互いに独立であるとする。この系をカノニカル分布で扱い、系の内部エネルギーと比熱を求めよ。(ミクロカノニカル分布での演習問題の間2をカノニカル分布で考える。)
5. 識別可能な同種粒子 N 個からなる系を考える。1つの粒子がとり得るエネルギーを $0, \epsilon_1, \epsilon_2$ ($0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$) とする。この系が温度 T の熱源と熱平衡にあるとして、以下の問いに答えよ。
 - (a) 1粒子の状態和 (分配関数) と全系の状態和を求めよ。
 - (b) エネルギーが $0, \epsilon_1, \epsilon_2$ の状態にある粒子数 N_0, N_1, N_2 を求めよ。
 - (c) 系のエネルギー平均値を求めよ。
 - (d) 系の比熱を求めよ。
6. 体積 V の容器に閉じ込められ、温度 T で熱平衡状態にある、 N 個の単原子分子からなる理想気体を考える。気体の分子は1種類で、古典的な取り扱いが許される条件にあるものと仮定する。速度が \vec{v} と $\vec{v} + d\vec{v}$ の間にある分子の単位体積あたりの平均数を $f(\vec{v})d^3\vec{v}$ と書くことにすると

$$f(\vec{v}) = C e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

である。ただし、 m は分子の質量、 k_B はボルツマン定数、 C は比例係数、 v は速さ $v = |\vec{v}|$ である。この式はマックスウエル-ボルツマンの速度分布則と呼ばれる。以下の問いに答えよ。

- (a) マックスウエル-ボルツマンの速度分布則は分子の位置 \vec{r} に依らない。また、速度 \vec{v} の大きさのみに依存し、速度の方向には依らない。その理由を説明せよ。
- (b) マックスウエル-ボルツマンの速度分布則の比例係数 C を求めたい。どのようにして求めればよいか、その考えかたを記せ。
- (c) 比例係数 C を具体的に求めよ。必要ならガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0),$$

を用いてもよい。

- (d) 速さが v と $v + dv$ の間にある分子の単位体積あたりの平均数を $F(v)dv$ と書くことにすると、 $F(v)$ はどのように表されるか。また、その v 依存性を図示せよ。
- (e) $F(v)$ が最大値をとるときの速さ v_{mp} は最も確からしい速さと呼ばれる。その表式を求めよ。