物理学演習 B [発展コース] 問題

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

ミクロカノニカル分布とその応用

1. 調和振動子を考える．この調和振動子が取りうるエネルギーの値は $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ (n は 0 以上の整数，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの，ω は定数) で与えらている．この調和振動子が N 個 (N は非常に大きな整数) 集まった系を考え，その系は外部から孤立しているとする．

   (a) 系の全エネルギー U が $U = M\hbar\omega + \frac{N}{2}\hbar\omega$ (M は N 以上の整数) のとき，U を各振動子に配分する方法の数が $W_M = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}$ であることを示せ．

   (b) 等重率の原理を仮定して，上での配分の方法それぞれが等しい確率で実現されるとする．このとき統計力学的エントロピー S を求めよ．ただし，十分大きな整数 n に対して成立する $\ln n! \simeq n\ln n - n$ の近似式を用いて結果を表すこと．

   (c) (b) で得た結果と M が U で表されることを用い，$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ から U と T の関係を求めよ．

2. エネルギーが $-\epsilon$，ϵ の 2 つの量子状態をとる温度 T の N 個の粒子の系がある．

   (a) 量子状態 ϵ にある粒子数を N_+ として，エントロピー S を N，N_+ の関数として表せ．

   (b) この系の全エネルギー E と温度 T の関係を求めよ．

   (c) 比熱 $\frac{dE}{dT}$ を求めよ．

3. 質量 m の同種粒子 N 個からなる理想気体 (体積 V) の統計力学的エンエトロピーを求める．

   (a) 個々の分子の運動量を $\vec{p}_i$ $(i = 1\ldots N)$ として，全系のエネルギーが E 以下である条件を式で表せ．

   (b) 全系のエネルギーが E 以下となる位相空間の体積 $\int\ldots\int d^3\vec{p}_1\ldots d^3\vec{p}_N d^3\vec{x}_1\ldots d^3\vec{x}_N$ を求めよ．

   (c) 状態数は位相空間の体積を $h^{3N}N!$ で割ることで求められる．(b) で得られる位相空間の体積から状態数 Ω_0 を求めよ．

   (d) $\Omega = \frac{d\Omega_0}{dE}$ を求めよ．

   (e) エネルギーが E から $E+\Delta E$ の間にある状態数は $\Omega = \frac{d\Omega_0}{dE}$ を用いて，$\Omega\Delta E$ で与えられる．$\ln\Omega_0$ と $\ln(\Omega\Delta E)$ を比べて，どういう条件で $\ln\Omega_0 \simeq \ln(\Omega\Delta E)$ と見なせるかを求めよ．

   (f) $\ln\Omega_0 \simeq \ln(\Omega\Delta E)$ と近似できるとし，統計力学的エンエトロピーを求め，熱力学で得た結果 (「エントロピーと熱力学第二法則」の演習問題中の問 2) と比較せよ．