物理学演習 B [発展コース] 問題 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

熱力学状態と熱力学第一法則

1. 系が熱平衡の状態にあるとき，その状態を特徴づける物理量で，状態に至るまでの過程によらないものを**状態量**という．状態量のうち，系の分量に依らないものを示強性状態量，分量に比例するものを示量性状態量という．

   (i) 温度: 示強性状態量

   (iI) 圧力: 示強性状態量

   (iii) 仕事: 状態量ではない．どういう過程で系に仕事がなされるかによって仕事の量は変わるため．

   (vi) 内部エネルギー: 示量性状態量

   (v) 粒子数: 示量性状態量

2. (i) 準静的過程: 系が変化する間，その系が熱平衡状態にあると見なせる過程

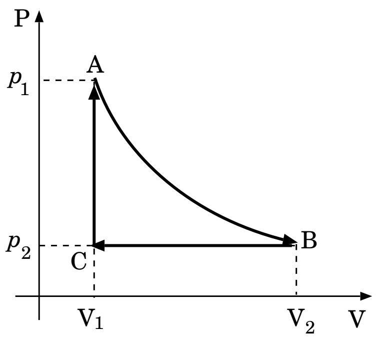
   (ii) サイクル: 系がある状態から変化を経て元の状態へ戻る過程.

   (iii) 等温過程: 系の温度が一定の過程

   (iv) 断熱過程: 外界との熱のやりとりがなく行われる過程

   (v) 可逆過程: 系の状態が変化する過程で，変化後の状態から変化前の状態へ，外界の状態も含めて逆行することが可能な過程.

3. (a)



   (b) 最初の A の状態での温度は，状態方程式 $PV = RT$ より $T = p_1V_1/R$ これを T_A とする．さらに，状態 B, C での温度をそれぞれ T_B, T_C と記す．(a) の図での A→B→C→A の各過程につき気体が吸収する熱量を求める．

   A→B : 断熱過程なので吸収する熱量は 0．自由膨張なので外界との仕事のやりとりも無いので温度は T_A のままである．$T_A = T_B = p_2V_2/R$.

   B→C : 状態 C での温度は $T_C = p_2V_1/R$．圧力一定なので定圧比熱 C_p を用いて，気体が吸収する熱量は

$$C_p(T_C - T_B) = C_p(\frac{p_2V_1}{R} - \frac{p_2V_2}{R}) = \frac{C_p}{R}p_2(V_1 - V_2)$$

   C→A : 状態 A での温度は $T_A = p_1V_1/R$．体積一定なので定積比熱 C_v を用いて，気体が吸収する熱量は

$$C_v(T_A - T_C) = C_v(\frac{p_1V_1}{R} - \frac{p_2V_1}{R}) = C_v(\frac{p_2V_2}{R} - \frac{p_2V_1}{R}) = \frac{C_v}{R}p_2(V_2 - V_1)$$

これら全てを足し合わせて，このサイクルで気体が吸収した熱量は

$$0+\frac{C_p}{R}p_2(V_1-V_2)+\frac{C_v}{R}p_2(V_2-V_1)=\frac{(C_p-C_v)}{R}p_2(V_1-V_2)$$

(c) 熱力学第一法則 $\Delta U=\delta Q+\delta W$ (δQ は系が外部からもらった熱量，δW は系が外部からされた仕事) から，

A→B : 断熱過程なので吸収する熱量は0．自由膨張なので外界との仕事のやりとりも無いので，内部エネルギーに変化はない，

$$\Delta U_{A\to B}=0$$

B→C : 気体が外部からもらった熱量は

$$\delta Q_{B\to C}=C_p(T_C-T_B)=\frac{C_p}{R}p_2(V_1-V_2)$$

外部からされた仕事は

$$\delta W_{B\to C}=-p_2\Delta V=-p_2(V_1-V_2)=p_2(V_2-V_1)$$

よって

$$\Delta U_{B\to C}=(\frac{C_p}{R}-1)p_2(V_1-V_2)$$

C→A : 気体が外部からもらった熱量は

$$C_v(T_A-T_C)_{C\to A}=\frac{C_v}{R}(p_1-p_2)V_1=\frac{C_v}{R}p_2(V_2-V_1)$$

体積一定なので外部からされた仕事は0．よって

$$\Delta U_{C\to A}=\frac{C_v}{R}p_2(V_2-V_1)$$

(d) 最初の状態に戻ると内部エネルギーの変化は 0 である．よって循環過程全体で考えて

$$\begin{aligned}0 &= \Delta U=\Delta U_{A\to B}+\Delta U_{B\to C}+\Delta U_{C\to A}\\ &= 0+(\frac{C_p}{R}-1)p_2(V_1-V_2)+\frac{C_v}{R}p_2(V_2-V_1)\\ &= \left\{\frac{(C_p-C_v)}{R}-1\right\}p_2(V_2-V_1)\end{aligned}$$

よって $C_p-C_v=R$.

4. 微小な変化での熱力学第一法則 $dU=\delta Q+\delta W$ を考える内部エネルギーは温度だけに依存するので $dU=C_VdT$．断熱過程なので $\delta Q=0$．外部からの仕事は $\delta W=-pdV$．これらから

$$C_VdT=-pdV=-\frac{nRT}{V}dV\ \Rightarrow\ \frac{dT}{T}=-\frac{(C_p-C_V)}{C_V}\frac{dV}{V}=-(\gamma-1)\frac{dV}{V}\quad(\gamma=\frac{C_p}{C_V})$$

ここで状態方程式 $pV=nRT$ と n モルの気体についての Mayer の関係式 $C_p-C_V=nR$ を用いた．両辺を積分して

$$\int\frac{dT}{T}=\int-(\gamma-1)\frac{dV}{V}$$
$$\ln T=-(\gamma-1)\ln V+(\text{定数})$$

よって $TV^{\gamma-1}=(\text{一定})$．が成立する．再び状態方程式を用いて $T=PV/(nR)$ を代入して，$PV^{\gamma}=(\text{一定})$．が成立する．

5. 状態 A,B,C,D での温度をそれぞれ T_A, T_B, T_C, T_D と記す．これらは状態方程式を用いて各状態での圧力と体積で表すことができる．$T = pV/(nR)$．また，A→B，C→D の断熱過程では $pV^\gamma = (一定)$ が成立している．

(a) B→C は定積変化なので

$$\Delta Q = C_V(T_C - T_B) = \frac{C_V}{nR}(p_C V_2 - p_B V_2) = \frac{C_V}{nR}V_2(p_C - p_B) = \frac{V_2}{(\gamma - 1)}(p_C - p_B)$$

ここで Mayer の関係式 $C_p - C_V = nR$ を用いた．

(b)

$$\begin{aligned} W &= \int p dV = \int_{A\to B} p dV + \int_{B\to C} p dV + \int_{C\to D} p dV + \int_{D\to A} p dV \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_A V_1^\gamma}{V^\gamma} dV + 0 + \int_{V_2}^{V_1} \frac{p_C V_2^\gamma}{V^\gamma} dV + 0 \\ &= p_A V_1^\gamma \frac{(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})}{(1-\gamma)} + p_C V_C^\gamma \frac{(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma})}{(1-\gamma)} \\ &= \frac{1}{(1-\gamma)}(p_B V_2 - p_A V_1 + p_D V_1 - p_C V_2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{W}{\Delta Q} &= \frac{-p_B V_2 + p_A V_1 - p_D V_1 + p_C V_2}{V_2(p_C - p_B)} = 1 - \frac{V_1(p_D - p_A)}{V_2(p_C - p_B)} \\ &= 1 - \frac{V_1\{p_C(V_2/V_1)^\gamma - p_B(V_2/V_1)^\gamma\}}{V_2(p_C - p_B)} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \end{aligned}$$