物理学演習 B [発展コース] 問題 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

1. ２つの粒子の質量を m_1, m_2．位置を $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ とすると

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

これらから

$$\begin{aligned}
\nabla_1 &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_1}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_1}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\nabla_R + \nabla_r \\
\nabla_2 &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_2}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\nabla_R - \nabla_r
\end{aligned}$$

この結果を用いて

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \nabla_1^2 = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\Delta_R + \Delta_r + \frac{2m_1}{(m_1+m_2)}\nabla_R\cdot\nabla_r \\
\Delta_2 &= \nabla_2^2 = \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\Delta_R + \Delta_r - \frac{2m_2}{(m_1+m_2)}\nabla_R\cdot\nabla_r \\
\frac{1}{m_1}\Delta_1 + \frac{1}{m_2}\Delta_2 &= \frac{m_1}{(m_1+m_2)^2}\Delta_R + \frac{1}{m_1}\Delta_r + \frac{2}{(m_1+m_2)}\nabla_R\cdot\nabla_r \\
&\quad + \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2}\Delta_R + \frac{1}{m_2}\Delta_r - \frac{2}{(m_1+m_2)}\nabla_R\cdot\nabla_r \\
&= \frac{1}{(m_1+m_2)}\Delta_R + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\Delta_r = \frac{1}{M}\Delta_R + \frac{1}{\mu}\Delta_r
\end{aligned}$$

2. ２つの粒子の位置を x_1, x_2，運動量を p_1, p_2，バネの自然長を a とする．$x_1 < x_2$ となるように座標をとっても一般性を失わない．古典力学でのラグランジアンは

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$$

重心座標と相対座標を導入する．

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1+m_2)} \quad , \quad r = x_2 - x_1$$

これから

$$x_1 = R - \frac{m_2}{m_1+m_2}r \quad , \quad x_2 = R + \frac{m_1}{m_1+m_2}r$$

をラグランジアンへ代入して

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m_1}{2}\left\{\dot{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{r}\right\}^2 + \frac{m_2}{2}\left\{\dot{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{r}\right\}^2 - \frac{1}{2}k(r-a)^2 \\
&= \frac{(m_1+m_2)^2}{2}\dot{R}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}k(r-a)^2 \qquad (\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2})
\end{aligned}$$

$r - a = q$ とおくと $\dot{q} = \dot{r}$．この q を新しい相対座標と考えると，q についての運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \mu\ddot{q} = -kq$$

一般解は

$$q = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (A,\, B \text{ は初期条件で決まる定数}, \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}})$$

これが古典力学での相対運動を記述する．

量子力学に移行する準備として，ハミルトニアンを作る．R, q についての共役運動量を p_R, p_q とすると

$$p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = (m_1 + m_2)\dot{R} \quad , \quad p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mu\dot{q}$$

ハミルトニアンは

$$H = p_R\dot{R} + p_q\dot{q} - L = \frac{p_R^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{p_q^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kq^2$$

R に関する部分と r に関する部分は分離しているので，それぞれを H_R, H_q と記す．

$$H_R = \frac{p_R^2}{2(m_1+m_2)} \quad , \quad H_q = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kq^2$$

H_q に関する部分を量子化して，波動関数を ψ とするとシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}_q\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 q^2\right]\psi$$

これは角振動数 ω の調和振動子を表すシュレーディンガー方程式になっている．(調和振動子の量子力学については授業で解説したので略)

3.

(a) 電子の質量を m として，ポジトロニウムでは換算質量は

$$\frac{m^2}{m+m} = \frac{m}{2}$$

よって電子質量の半分になる．

(b) エネルギー順位は，主量子数を n として

$$E_n = -\frac{e^4\mu}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2} = -\frac{e^4 m}{64\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2}$$

(c) 軌道角運動量が 0 の場合，電子のスピンだけが全角運動量に寄与する．合成された状態は (角運動量の演習を参照)

$$\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 + |1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right] \\
|1,-1\rangle &= |1/2,-1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2 \\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 - |1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]
\end{aligned}$$

(電子のスピンを合成した角運動量の大きさが 1 の状態をオルソポジトロニウム，0 の状態をパラポジトロニウムという．)

4. 水素型原子の電子状態は，主量子数 n，軌道量子数 ℓ，磁気量子数 m とスピンの z 成分で指定され，外場やスピンの影響が無ければ n だけで決まる．問題にあるような項 $-\gamma\vec{B}\cdot\vec{L}$ がハミルトニアンに加わり，$\vec{B}=(0,0,B)$ とすると，ハミルトニアンに新たに加わる項 ΔH は次のようになる．

$$\Delta H = -\gamma B L_z$$

スピンの影響を無視して電子状態を $|n,l,m\rangle$ で表すと，$L_z|n,l,m\rangle = m|n,l,m\rangle$ なので，エネルギー準位の変化 ΔE は

$$\Delta E = -\gamma B m$$

となって $m=-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell-1,\ell$ の値に従ってエネルギー準位が変化する．

5. 水素型原子の電子状態を主量子数 n，軌道量子数 ℓ，磁気量子数 m とスピンの z 成分 ξ_z を用いて $|n,l,m,\xi_z\rangle$ と表す．ハミルトニアンに加わる項 $\Delta H=\mu\vec{L}\cdot\vec{s}$ を変形して

$$\Delta H = \mu\vec{L}\cdot\vec{s} = \frac{1}{2}\mu\{(\vec{L}+\vec{s})^2-\vec{L}^2-\vec{s}^2\}$$

全角運動量 $\vec{J}=\vec{L}+\vec{s}$ の大きさとしてとりうる値は $\ell+1/2,\ \ell-1/2$ のどちらかだけなので

$J=\ell+1/2$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \langle n,l,m,\xi_z|\frac{1}{2}\mu\{(\vec{L}+\vec{s})^2-\vec{L}^2-\vec{s}^2\}|n,l,m,\xi_z\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mu\{(\ell+\frac{1}{2})(\ell+\frac{1}{2}+1)-\ell(\ell+1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\} = \frac{\mu}{2}(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}) \\
&= \frac{\mu\ell}{2}
\end{aligned}$$

$J=\ell-1/2$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \langle n,l,m,\xi_z|\frac{1}{2}\mu\{(\vec{L}+\vec{s})^2-\vec{L}^2-\vec{s}^2\}|n,l,m,\xi_z\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mu\{(\ell-\frac{1}{2})(\ell-\frac{1}{2}+1)-\ell(\ell+1)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\} = \frac{\mu}{2}(-\frac{\ell}{2}-\frac{\ell+1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}) \\
&= -\frac{\mu(\ell+1)}{2}
\end{aligned}$$

6.

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_2)+\phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_1)\right]$$

(b)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_2)-\phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_1)\right]$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_2)\phi_{n3}(x_3)+\phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_3)\phi_{n3}(x_1)+\phi_{n1}(x_3)\phi_{n2}(x_1)\phi_{n3}(x_2)\right. \\
&\quad\left.+\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_3)\phi_{n3}(x_2)+\phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_1)\phi_{n3}(x_3)+\phi_{n1}(x_3)\phi_{n2}(x_2)\phi_{n3}(x_1)\right]
\end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_2)\phi_{n3}(x_3) + \phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_3)\phi_{n3}(x_1) + \phi_{n1}(x_3)\phi_{n2}(x_1)\phi_{n3}(x_2)\right. \\
& \left. -\phi_{n1}(x_1)\phi_{n2}(x_3)\phi_{n3}(x_2) - \phi_{n1}(x_2)\phi_{n2}(x_1)\phi_{n3}(x_3) - \phi_{n1}(x_3)\phi_{n2}(x_2)\phi_{n3}(x_1)\right] \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \phi_{n1}(x_1) & \phi_{n2}(x_1) & \phi_{n3}(x_1) \\ \phi_{n1}(x_2) & \phi_{n2}(x_2) & \phi_{n3}(x_2) \\ \phi_{n1}(x_3) & \phi_{n2}(x_3) & \phi_{n3}(x_3) \end{vmatrix} \quad \text{(スレーター行列式)}
\end{aligned}
$$

7. 角運動量が J の状態に，大きさ 1/2 の角運動量を合成すると，全角運動量の大きさは $J \pm 1/2$ となる．これより，フェルミ粒子が奇数個集まった状態では全角運動量の大きさは半奇数となって，全体としてフェルミ粒子としてふるまう．偶数個集まった状態では全角運動量の大きさは整数となって，全体としてボーズ粒子としてふるまう．