物理学演習 B [発展コース] 問題 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

1. (a)

$$
\begin{aligned}
[M_x, M_y] &= (-i)^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = i(-i) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iM_z
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
[M_y, M_z] = iM_x \ , \quad [M_z, M_x] = iM_y
$$

よって，これらは一般の角運動量演算子と同じ交換関係を満たす.

(b) M_z の固有値を λ とすると

$$
0 = |\lambda I - M_z| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & i & 0 \\ -i & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)
$$

よって $\lambda = -1, 0, 1$．固有値 λ に対応する固有ベクトルを $\vec{v}_\lambda = (a, b, c)^T$ と置くと

$$
\begin{aligned}
M_z \vec{v}_1 &= \vec{v}_1 \\
-i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -ib \\ ia \\ 0 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この結果を用いて，規格化した固有ベクトルは，位相の不定性を除いて

$$
\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\vec{M}^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I
\end{aligned}
$$

よって固有値は 2(のみ) で，$\vec{0}$ 以外の任意の 3 成分縦ベクトルが固有ベクトルとなる.

2.

(a)

$$\begin{aligned}[(\vec{J})^2, J_z] &= [J_x^2+J_y^2+J_z^2, J_z] = J_x[J_x,J_z]+[J_x,J_z]J_x+J_y[J_y,J_z]+[J_y,J_z]J_y+0 \\ &= J_x(-iJ_y)+(-iJ_y)J_x+J_y(iJ_x)+(iJ_x)J_y = 0\end{aligned}$$

(b) $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ より $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ よって

$$J_x^2 = \left[\frac{1}{2}(J_+ + J_-)\right]^2 = \frac{1}{4}[J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+]$$

(c)

$$\begin{aligned}J_+J_- &= (J_x+iJ_y)(J_x-iJ_y) = J_x^2+J_y^2+i(J_yJ_x-J_xJ_y) = (\vec{J})^2 - J_z^2 + i[J_y,J_x] \\ &= (\vec{J})^2 - J_z^2 + i(-iJ_z) = (\vec{J})^2 - J_z^2 + J_z \\ J_-J_+ &= (J_x-iJ_y)(J_x+iJ_y) = J_x^2+J_y^2-i(J_yJ_x-J_xJ_y) = (\vec{J})^2 - J_z^2 - i[J_y,J_x] \\ &= (\vec{J})^2 - J_z^2 - i(-iJ_z) = (\vec{J})^2 - J_z^2 - J_z\end{aligned}$$

(d) $a=b$ より

$$H = a(J_x^2+J_y^2)+cJ_z^2 = a((\vec{J})^2-J_z^2)+cJ_z^2 = a(\vec{J})^2+(c-a)J_z^2$$

これを $|j,m\rangle$ に作用させると

$$H|j,m\rangle = [a(\vec{J})^2+(c-a)J_z^2]|j,m\rangle = \{aj(j+1)+(c-a)m^2\}|j,m\rangle$$

よって $|j,m\rangle$ は H の固有状態であり，その固有値は $aj(j+1)+(c-a)m^2$

(e) ハミルトニアン H で J_x^2, J_y^2 を $J_\pm$ で表すと

(b) より $$J_x^2 = \frac{1}{4}[J_+^2+J_-^2+J_+J_-+J_-J_+]$$

同様の計算で $$J_y^2 = -\frac{1}{4}[J_+^2+J_-^2-J_+J_--J_-J_+]$$

よって

$$\begin{aligned}H &= \frac{a}{4}[J_+^2+J_-^2+J_+J_-+J_-J_+] - \frac{b}{4}[J_+^2+J_-^2-J_+J_--J_-J_+]+cJ_z^2 \\ &= \frac{(a-b)}{4}(J_+^2+J_-^2)+\frac{(a+b)}{4}(J_+J_-+J_-J_+)+cJ_z^2 \\ &= \frac{(a-b)}{4}(J_+^2+J_-^2)+\frac{(a+b)}{2}\{(\vec{J})^2-J_z^2\}+cJ_z^2\end{aligned}$$

$j=1/2$ なので，可能な状態は $|1/2,1/2\rangle$ と $|1/2,-1/2\rangle$ だけである．これらの状態でハミルトニアンの行列要素を計算すると，J_+^2, J_-^2 がそれらの状態にかかると 0 になることを用いて，

$$\begin{aligned}\langle 1/2,1/2|H|1/2,1/2\rangle &= \frac{(a+b)}{2}(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})+c\frac{1}{4} = \frac{a+b+c}{4} \\ \langle 1/2,-1/2|H|1/2,-1/2\rangle &= \frac{(a+b)}{2}(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})+c\frac{1}{4} = \frac{a+b+c}{4} \\ \langle 1/2,-1/2|H|1/2,1/2\rangle &= \langle 1/2,1/2|H|1/2,-1/2\rangle = 0\end{aligned}$$

よって，この場合ハミルトニアン行列は対角的であり，とりうる固有値は $\frac{a+b+c}{4}$ のみ．

3. $(\vec{J_i})^2$ $(i=1,2)$ は J_{ix}, J_{iy}, J_{iz} のいずれとも交換可能であることを用いて，

$$
\begin{aligned}
[(\vec{J})^2, J_z] &= [(\vec{J_1})^2 + 2(\vec{J_1})\cdot(\vec{J_2}) + (\vec{J_2})^2, J_{1z}+J_{2z}] \\
&= [(\vec{J_1})^2, J_{1z}] + 2[(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z}), J_{1z}+J_{2z}] + [(\vec{J_2})^2, J_{2z}] \\
&= 2[J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y}, J_{1z}] + 2[J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y}, J_{2z}] \\
&= 2(-i)J_{1y}J_{2x} + 2iJ_{1x}J_{2y} + 2(-i)J_{1x}J_{2y} + 2iJ_{1y}J_{2x} = 0 \\
\left[(\vec{J})^2, (\vec{J_1})^2\right] &= 2[(\vec{J_1})\cdot(\vec{J_2}), (\vec{J_1})^2] = 0 \\
\left[(\vec{J})^2, (\vec{J_2})^2\right] &= 2[(\vec{J_1})\cdot(\vec{J_2}), (\vec{J_2})^2] = 0
\end{aligned}
$$

残りは自明.

4.

$$
\begin{aligned}
(\vec{J_1}+\vec{J_2})^2|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle &= \{(\vec{J_1})^2 + (\vec{J_2})^2 + 2(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z})\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&= \ell_1(\ell_1+1)|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle + \ell_2(\ell_2+1)|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle + 2\ell_1\ell_2|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&\quad +\{(J_{1x}+iJ_{1y})(J_{2x}-iJ_{2y}) + (J_{1x}-iJ_{1y})(J_{2x}+iJ_{2y})\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&= \{\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1) + 2\ell_1\ell_2\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&\quad +\{J_{1+}J_{1y} + J_{1-}J_{2+}\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle
\end{aligned}
$$

$|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle$ は z 成分が最も大きな状態なので J_{1+} または J_{2+} を作用させると 0 になるとから，

$$
\begin{aligned}
(\vec{J_1}+\vec{J_2})^2|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle &= \{\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1) + 2\ell_1\ell_2\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&= \{(\ell_1+\ell_2)^2 + (\ell_1+\ell_2)\}|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle \\
&= (\ell_1+\ell_2)(\ell_1+\ell_2+1)|\ell_1,\ell_1\rangle|\ell_2,\ell_2\rangle
\end{aligned}
$$

5.

(復習のため，最も簡単な大きさ 1/2 の角運動量が 2 つの場合の合成を解説しておく．)

角運動量 J_i (i は x, y, z ではなく，個々の角運動量を識別する記号) の大きさとして λ，その z 成分の値として m を持つ状態を $|\lambda,m\rangle_i$ と記し，規格直交化されているものとする．合成角運動量の z 成分の値が最も大きな状態どうしから

$$
|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2
$$

を考える．この状態に対し

$$
\begin{aligned}
J_z|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 &= (J_{1z}+J_{2z})|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
&= (J_{1z}|1/2,1/2\rangle_1)|1/2,1/2\rangle_2 + |1/2,1/2\rangle_1(J_{2z})|1/2,1/2\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2}kket1/2,1/2_1)|1/2,1/2\rangle_2 + |1/2,1/2\rangle_1(\frac{1}{2})|1/2,1/2\rangle_2 \\
&= |1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
(\vec{J})^2|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 &= (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \quad (\text{問 5 より}) \\
&= 2|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2
\end{aligned}
$$

よって $|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 = |1,1\rangle$ である．次にこの状態に J_- を作用させる．

$$
J_-|\lambda,m\rangle = \sqrt{(\lambda+m)(\lambda-m+1)}|\lambda,m-1\rangle
$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
J_-|1,1\rangle &= (J_{1-}+J_{2-})|1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
\sqrt{(1+1)(1-1+1)}|1,0\rangle &= (J_{1-}|1/2,1/2\rangle_1)|1/2,1/2\rangle_2+|1/2,1/2\rangle_1(J_{2-}|1/2,1/2\rangle_2) \\
\sqrt{2}|1,0\rangle &= |1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2+|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2 \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2+|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]
\end{aligned}
$$

この状態にさらに J_- を作用させる．

$$
\begin{aligned}
J_-|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(J_{1-}|1/2,-1/2\rangle_1)|1/2,1/2\rangle_2+|1/2,-1/2\rangle_1(J_{2-}|1/2,1/2\rangle_2) \\
&\quad +(J_{1-}|1/2,1/2\rangle_1)|1/2,-1/2\rangle_2+|1/2,1/2\rangle_1((J_{2-}|1/2,-1/2\rangle_2)] \\
\sqrt{2}|1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[0+|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2+|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2+0] \\
|1,-1\rangle &= |1/2,-1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2
\end{aligned}
$$

元は $|1/2,1/2\rangle_1$, $|1/2,-1/2\rangle_1$, $|1/2,1/2\rangle_2$, $|1/2,-1/2\rangle_2$ の 4 つの状態があった．これまで合成された状態は 3 つなので，あと一つ合成状態が作れることになる．これまで合成された 3 つの状態全てと直交する状態として

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2-|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]
$$

をとる．この状態に対し

$$
J_z\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2-|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]=0
$$

$$
(\vec{J})^2\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2-|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]=0
$$

(演算子を作用させる状態は，状態 1$\leftrightarrow$ 状態 2 の入れ替えで反対称．一方，作用する演算子は，同じ入れ替えで対称なので，作用させた結果は 0 になる．) よって

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |1/2,1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2+|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right] \\
|1,-1\rangle &= |1/2,-1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2 \\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1/2,-1/2\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2-|1/2,1/2\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2\right]
\end{aligned}
$$

上の解説と同様の手順で行う．問 5 の結果のみ記す

$$
\begin{aligned}
|3/2,3/2\rangle &= |1,1\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|3/2,1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2+\sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|3/2,-1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2+\frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|3/2,-3/2\rangle &= |1,-1\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2 \\
|1/2,1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2-\frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2 \\
|1/2,-1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle_1|1/2,-1/2\rangle_2-\sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle_1|1/2,1/2\rangle_2
\end{aligned}
$$

(参考のため大きさ１の角運動量２つを合成した場合の結果も記しておく．)

$$
\begin{aligned}
|2,2\rangle &= |1,1\rangle_1|1,1\rangle_2 \\
|2,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,1\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1|1,1\rangle_2] \\
|2,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle_1|1,0\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2 \\
|2,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2 + |1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2] \\
|2,-2\rangle &= |1,-1\rangle_1|1,-1\rangle_2 \\
|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,1\rangle_1|1,0\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,1\rangle_2] \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2] \\
|1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,0\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1|1,0\rangle_2] \\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}[|1,1\rangle_1|1,-1\rangle_2 - |1,0\rangle_1|1,0\rangle_2 + |1,-1\rangle_1|1,1\rangle_2]
\end{aligned}
$$