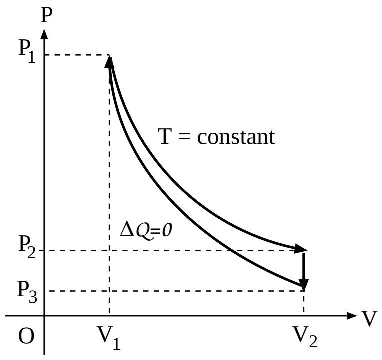
物理学演習 B [発展コース] レポート問題 (1/13〆切分) 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

1. (a)



(b) 断熱過程では $p_1V_1^\gamma = p_3V_2^\gamma$ $(\gamma = C_p/C_v)$ が成立するので $p_3 = p_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$.

(c) 熱力学第一法則より $dU = \delta Q - pdV$．等温過程なので内部エネルギーは変化しないので $dU = 0$．この過程での温度を T_1 とすると，状態方程式より $p_1V_1 = RT_1$．よって

$$\Delta Q = \int \delta Q = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V}dV = p_1V_1\ln(\frac{V_2}{V_1})$$

(d) 等積変化後の温度を T_3 とすると，状態方程式より $T_3 = \dfrac{p_3V_2}{R}$．気体が放出した熱量は，定積比熱を用いて

$$-C_v(T_3 - T_1) = -C_v(\frac{p_3V_2}{R} - \frac{p_1V_1}{R}) = \frac{C_v}{R}(p_1V_1 - p_3V_2) = \frac{C_v}{R}(p_2 - p_3)V_2 = \frac{C_v}{R}p_1V_1(1 - \frac{p_3}{p_2})$$

(後半の 3 つの式のうちいずれでも可)

(e) 気体がなす仕事 (外へ行う仕事 − 外からされた仕事) は (a) の $p - V$ グラフで囲まれた部分の面積で与えられる．断熱過程では $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma$ なので，

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2}(\frac{RT_1}{V} - \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma})dV = p_1V_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) + p_1V_1^\gamma\frac{1}{\gamma-1}(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}) \\ &= p_1V_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) + \frac{1}{(\gamma-1)}p_1V_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - \frac{1}{(\gamma-1)}p_1V_1 \\ &= p_1V_1\left[\ln(\frac{V_2}{V_1}) - \frac{1}{(\gamma-1)}\left\{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}\right] \end{aligned}$$

別解

熱力学第一法則 $\Delta U = \Delta Q - W$ (W は外へなす仕事) をサイクルに適用すると，元の状態に戻ると $\Delta U = 0$ なので，W は気体への熱の出入り (ΔQ) に等しい．吸収した熱量は (c) で与えられ，外へ放出した熱量を (d) で与えられるので，ΔQ = [(c) の結果] − [(d) の結果] となり，その結果は上式と一致する．

(f) 効率は (行った仕事)/(もらった熱量) なので (e) の結果を (c) の結果で割ればよい．

$$1 - \frac{1}{(\gamma-1)\ln(V_2/V_1)}\left\{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}$$

2. (a) $dU = TdS - PdV$ を用いて $dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$．$U$ を T と V の関数と考えて，

$$\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{P}{T}, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}$$

(b) $\frac{\partial S}{\partial V}$ を T で偏微分

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial T}$$

$\frac{\partial S}{\partial T}$ を V で偏微分

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$$

両者が一致するので

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial V} &= \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \\
-\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial V} - \frac{P}{T^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial T} &= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial V} &= T\frac{\partial P}{\partial T} - P
\end{aligned}$$

(c) $P = f(V)T$ のとき $\frac{\partial P}{\partial T} = f(V)$．これを (b) の結果に代入して

$$\frac{\partial U}{\partial V} = Tf(V) - P = P - P = 0$$

よって U は V に依存しない．

3. (a) N 回進む内，右に p 回，上に $N-p$ 回進む場合が当てはまるので，求める場合の数は N 個から p 個を選ぶ場合の数になる．

$${}_N C_p = \frac{N!}{p!(N-p)!}$$

(b) エントロピーを S として

$$\begin{aligned}
S &= k\ln W = k\ln\frac{N!}{p!(N-p)!} \\
&\cong k[N\ln N - N - (p\ln p - p) - \{(N-p)\ln(N-p) - (N-p)\}] \\
&= k[N\ln N - p\ln p - (N-p)\ln(N-p)] \\
\frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial(aLp)} = \frac{1}{aL}\frac{\partial S}{\partial p} \\
&= \frac{k}{aL}[-\ln p - 1 + \ln(N-p) + 1] = \frac{k}{aL}\ln(\frac{N}{p} - 1) \\
\frac{N}{p} - 1 &= e^{aL/kT} \ \rightarrow \ p = \frac{N}{1 + e^{aL/kT}}
\end{aligned}$$

(c) (b) の結果より $T \to \infty$ で p の期待値は $N/2$ になる．