物理学演習 B [発展コース] レポート問題 (11/9) 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

1. 1)

$$
\begin{aligned}
1 &= |N|^2 \int_0^\infty e^{-kr^2} 2\pi r dr = 2\pi |N|^2 \left[-\frac{1}{2k} e^{-kr^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{k} |N|^2 \\
|N| &= \sqrt{\frac{k}{\pi}}
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r\cos\theta) e^{-kr^2} r d\theta dr = 0 \\
\langle y \rangle &= \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r\sin\theta) e^{-kr^2} r d\theta dr = 0
\end{aligned}
$$

3)

$$
\langle r \rangle = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty r e^{-kr^2} 2\pi r dr = -2k \frac{\partial}{\partial k} \int_0^\infty e^{-kr^2} dr = -k \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{\frac{\pi}{k}} = \frac{\sqrt{\pi} k}{2k^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}
$$

4) $\langle r \rangle^2 = (\langle \sqrt{x^2+y^2} \rangle)^2 \neq \langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2$．こうなる物理的理由を考察すること．

2. (a) $i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ に H の行列表示と $\psi = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
& i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_2(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} \\
& \dot{a}_1(t) = \frac{k}{i\hbar} a_2(t) \ , \ \ \dot{a}_2(t) = \frac{k}{i\hbar} a_1(t) \\
& \ddot{a}_1(t) = -\frac{k^2}{\hbar^2} a_1(t) \ , \ \ \ddot{a}_2(t) = -\frac{k^2}{\hbar^2} a_2(t)
\end{aligned}
$$

(b) a) の方程式の一般解は $a_1(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ ($C_{1,2}$ は定数，$\omega = k/\hbar$) 初期条件より $C_1 = 1$．同様に $a_2(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t)$ ($D_{1,2}$ は定数，$\omega = k/\hbar$) 初期条件より $D_1 = 0$．これと (a) で求めた方程式より

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_1(t) &= \frac{k}{i\hbar} a_2(t) \\
\omega\{-\sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\} &= \frac{k}{i\hbar} D_2 \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

これが任意の t で成立するので $C_2 = 0$，$D_2 = -i\hbar\omega/k = -i$．よって $a_1(t) = \cos(\omega t)$，$a_2(t) = -i\sin(\omega t)$．これは規格化条件 $1 = |a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2$ を満たしている．これから $|a_2(t)|^2 = \sin^2(\frac{k}{\hbar} t)$．

3. (a)

$$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = -2i[J_x, J_y] = -2i(iJ_z) = 2J_z$$

(b)

$$\begin{aligned}
[J_+, J_x^2] &= [J_x + iJ_y, J_x^2] = i[J_y, J_x]J_x + iJ_x[J_y, J_x] = i(-iJ_z)J_x + iJ_x(-iJ_z) = J_zJ_x + J_zJ_x \\
[J_+, J_y^2] &= [J_x + iJ_y, J_y^2] = [J_x, J_y]J_y + J_y[J_x, J_y] = iJ_zJ_y + J_yiJ_z = i(J_zJ_y + J_zJ_y) \\
[J_+, J_z^2] &= [J_x + iJ_y, J_z^2] = [J_x, J_z^2] + i[J_y, J_z^2] \\
&= [J_x, J_z]J_z + J_z[J_x, J_z] + i[J_y, J_z]J_z + iJ_z[J_y, J_z] \\
&= -iJ_yJ_z - iJ_zJ_y - J_xJ_z - J_zJ_x \\
[J_+, (\vec{J})^2] &= 0
\end{aligned}$$

(c) b) と同様

(d) 角運動量の演習で説明済み.

(e)

$$\begin{aligned}
J_x^2 &= \frac{1}{4}(J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+) \\
J_y^2 &= \left[\frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\right]^2 = -\frac{1}{4}(J_+^2 + J_-^2 - J_+J_- - J_-J_+) \\
J_x^2 - J_y^2 &= \frac{1}{2}(J_+^2 + J_-^2)
\end{aligned}$$

4.

$$A\,\vec{s}_p \cdot \vec{s}_e = \frac{A}{2}\left[(\vec{s}_p + \vec{s}_e)^2 - (\vec{s}_p)^2 - (\vec{s}_e)^2\right]$$

核と電子の合成スピン角運動量の大きさが 1 のとき $\frac{A}{2}(1(1+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = \frac{A}{4}$ 変化し，核と電子の合成スピン角運動量の大きさが 0 のとき $\frac{A}{2}(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = -\frac{3A}{4}$ 変化する.