# 物理学演習 B [発展コース] 問題 解答例

担当 栗本 (krmt@sci.u-toyama.ac.jp)

## 量子力学の基礎

1. 日焼け

   太陽光を数時間浴びると日焼けするが，電気ストーブの前に長時間いても日焼けはしない．これは太陽光中には紫外線が含まれ，電気ストーブからは赤外線が出ていることに起因する．光量子論より光子のエネルギーは波長に反比例し $E=\dfrac{hc}{\lambda}$，ミクロレベルでの反応は光子一つと原子・分子が反応する．あびるエネルギーの総量が同じとしても，波長の短い紫外線の光子は一つ一つのエネルギーが大きく，人体中の分子に化学変化を起こさせることができる．一方，赤外線の波長は長いので光子のエネルギーがその反応を起こせるほど大きくないので，日焼けはおきない．古典物理学ではエネルギーの総量だけを考えるのでこの現象は説明できない．

   電子顕微鏡

   古典物理学では電子を粒子として扱うので，波のような干渉，回折は起きないが，電子ビームを観測対象に照射する電子顕微鏡では，光学顕微鏡と同様に干渉，回折を観察することができる．これは電子が波としての性質も備えていることを意味し，量子論的な取り扱いをしないと説明できない．

2. 波長 $\lambda$ [m] の光子のエネルギーは $E=\dfrac{hc}{\lambda}$ [J] で与えられる．問題のレーザーポインターの出力は $P$ [W] なので，1 秒あたり $P$ [J] のエネルギーを放出していることになる．これを光子の数に換算すれば

   $$\frac{P}{(hc/\lambda)}=\frac{P\lambda}{hc} \quad \text{個}$$

   また，この光子 1 つの運動量は $\dfrac{h}{\lambda}$ であるので，光子を全て完全反射すると 1 秒あたり

   $$2\frac{h}{\lambda}\times\frac{P\lambda}{hc}=\frac{2P}{c} \quad [\mathrm{Ns}]$$

   の力積を受ける．すなわち，$\dfrac{2P}{c}$ の力を受けることになる．

3. X 線の入射方向を $x$ 軸にとり，電子の運動の $x$ 軸と垂直な成分の方向を $y$ 軸にとる．散乱された電子の運動量を $\vec{p}=(p_x,p_y)$ と表し，$x$, $y$ それぞれの成分につき，運動量保存則を記すと

   $$\begin{aligned}\frac{h}{\lambda} &= p_x+\frac{h}{\lambda'}\cos\theta\\ 0 &= p_y+\frac{h}{\lambda'}\sin\theta\end{aligned}$$

   また，エネルギー保存則から

   $$\frac{hc}{\lambda}=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+\frac{hc}{\lambda'}$$

   これらより

   $$hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}\cos\theta\right)^2+\left(-\frac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}
2mhc\lambda\lambda'(\lambda'-\lambda) &= h^2\left[(\lambda'-\lambda\cos\theta)^2+(\lambda\sin\theta)^2\right]\\
&= h^2\left[\lambda^2+\lambda'^2-2\lambda\lambda'\cos\theta\right]=h^2\left[(\lambda-\lambda')^2+2\lambda\lambda'(1-\cos\theta)\right]\\
&\cong 4h^2\lambda\lambda'\sin^2\frac{\theta}{2}\\
\lambda'-\lambda &= \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

4. (a) 規格化条件より

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}|Ae^{-(k/2)(x-c)^2}|^2dx=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k(x-c)^2}dx=|A|^2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

よって $A=\left(\frac{k}{\pi}\right)^{1/4}$ (位相の不定性として $e^{i\theta}$ ($\theta$ は任意の実数) がかかってもよい．)

(b)

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-(k/2)(x-c)^2})^*xAe^{-(k/2)(x-c)^2}dx=|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-k(x-c)^2}dx\\
&= |A|^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)e^{-k(x-c)^2}dx+c\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k(x-c)^2}dx\right]=|A|^2\left[0+c\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right]=c
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta x)^2\rangle &= \langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\langle(x^2-2x\langle x\rangle+\langle x\rangle^2)\rangle\\
&= \langle x^2\rangle-2\langle x\rangle\langle x\rangle+\langle x\rangle^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2\\
\langle x^2\rangle &= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-k(x-c)^2}dx=|A|^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\{(x-c)^2+2c(x-c)+c^2\}e^{-k(x-c)^2}dx\right]\\
&= |A|^2\left[\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{\pi}{k}}+0+c^2\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right]=\frac{1}{2k}+c^2
\end{aligned}$$

よって $\langle(\Delta x)^2\rangle=\frac{1}{2k}$

(d)

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-(k/2)(x-c)^2})^*(-i\hbar\frac{d}{dx})Ae^{-(k/2)(x-c)^2}dx=|A|^2i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}k(x-c)e^{-k(x-c)^2}dx=0$$

(e)

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta p)^2\rangle &= -\hbar^2|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(k/2)(x-c)^2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-(k/2)(x-c)^2}dx\\
&= -\hbar^2|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}\{k^2(x-c)^2-k\}e^{-k(x-c)^2}dx\\
&= -\hbar^2|A|^2\left[k^2\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{\pi}{k}}-k\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right]=\frac{k\hbar^2}{2}
\end{aligned}$$

(f)

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle}=\sqrt{\frac{1}{2k}\frac{k\hbar^2}{2}}=\frac{\hbar}{2}$$

5. (a)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|Ne^{-r/a}|^2r^2\sin\theta d\phi d\theta dr = 4\pi|N|^2\int_0^\infty r^2e^{-2r/a}dr \\ &= 4\pi|N|^2\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^2\int_0^\infty e^{-2r/a}dr = \pi|N|^2\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^2\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2}|N|^2 2a^3 = \pi a^3|N|^2 \end{aligned}$$

よって $N = (\pi a^3)^{-1/2}$

(b)

$$\begin{aligned} \langle r\rangle &= 4\pi|N|^2\int_0^\infty re^{-2r/a}r^2dr = 4\pi|N|^2\int_0^\infty r^3e^{-2r/a}dr \\ &= 4\pi|N|^2\frac{(-1)}{8}\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^3\int_0^\infty e^{-2r/a}dr = -\frac{\pi|N|^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^3\frac{a}{2} \\ &= \frac{\pi|N|^2}{4}6a^4 = \pi a^4\frac{3}{2\pi a^3} = \frac{3}{2}a \end{aligned}$$

(c) 粒子が $r \leq s$ に存在する確率を $P(s)$ と記すと

$$\begin{aligned} P(s) &= \int_0^s|Ne^{-r/a}|^2 4\pi r^2dr = 4\pi|N|^2\int_0^s r^2e^{-2r/a}dr = \pi|N|^2\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^2\int_0^s e^{-2r/a}dr \\ &= \pi|N|^2\left(\frac{\partial}{\partial(1/a)}\right)^2\left[-\frac{a}{2}e^{-2s/a}+\frac{a}{2}\right] \\ &= \frac{1}{a^3}\left[-\{a^3+2sa^2+2s^2a\}e^{-2s/a}+a^3\right] = 1-(1+2\frac{s}{a}+2\frac{s^2}{a^2})e^{-2s/a} \end{aligned}$$

よって

$$P(a) = 1-5e^{-2}$$

(d) (c) より，求める確率は $1-P(a) = 5e^{-2}$

6. (a) 定義より，任意の関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

一方，$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(-x)dx$ で $x=-t$ と置くと $dx=-dt$，

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(-x)dx = \int_\infty^{-\infty}f(-t)\delta(t)(-dt) = \int_{-\infty}^\infty f(-t)\delta(t)dt = f(-0) = f(0)$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が一致するので $\delta(x) = \delta(-x)$.

(b) 任意の関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)x\delta(x)dx = \int_{-\infty}^\infty (f(x)x)\,\delta(x)dx = f(0)\,0 = 0$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が 0 になるので $x\delta(x) = 0$.

(c) $a>0$ のとき $ax=t$ と置くと $adx=dt$，

$$\begin{aligned} &a>0 \text{ のとき} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^\infty f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt = \frac{f(0)}{a} \\ &a<0 \text{ のとき} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\delta(ax)dx = \int_\infty^{-\infty} f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt = -\int_{-\infty}^\infty f(\frac{t}{a})\delta(t)\frac{1}{a}dt = -\frac{f(0)}{a} \end{aligned}$$

よって $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

(d)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[x\delta'(x)+\delta(x)]dx &= [f(x)x\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(f(x)x)'\delta(x)dx + f(0) \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty}(f'(x)x+f(x))\delta(x)dx + f(0) \\ &= 0 - 0 - f(0) + f(0) = 0\end{aligned}$$

よって任意の関数 $f(x)$ に対し結果が 0 になるので $x\delta'(x)+\delta(x)=0$.