

Flavor Dynamics and CP Violation

栗本 猛 (富山大)

1998 素粒子物理学 理論実験合同夏の学校 講義ノート
科研費特定領域研究 (A)(1) 「CP 非保存の物理」

目次

第 0 章 予備知識	5
0.1 弱い相互作用概説	5
0.1.1 崩壊とパリティの破れ	5
0.1.2 Fermi 理論	6
0.1.3 Gauge 理論の導入	8
0.1.4 Weinberg–Salam 模型の成功	10
0.2 ゲ - ジ理論入門	11
0.2.1 対称性と群	11
0.2.2 ゲ - ジ理論	13
0.2.3 対称性の自発的な破れと Higgs 機構	14
0.3 Weinberg–Salam 模型	16
0.3.1 登場する粒子たち	16
0.3.2 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲ - ジ模型	18
0.4 Phenomenology of Flavor Dynamics	20
0.4.1 現象論 à la carte	20
第 1 章 Flavor Dynamics の基礎	27
1.1 Flavor Mixing	27
1.1.1 世代のくりかえし	27
1.1.2 世代混合	28
1.2 Quark mixing matrix	29
1.3 NFC and the extensions of the standard model	32
第 2 章 CP violation の基礎	37
2.1 Chirality	37
2.2 Parity (P)	38
2.3 Charge conjugation (C)	38
2.4 CP transformation	40
2.5 Observable of CP violation in S matrix	41
2.6 Electirc dipole moment	42
第 3 章 Neutral meson system	46
3.1 K and B mesons	46
3.2 Quantum mechanics of neutral meson system	47
3.3 K meson の性質	49
3.4 B meson の性質	53
3.5 Standard model description of neutral meson properties	54
3.5.1 Unitarity Triangle	54
3.5.2 $ V_{cb} , V_{ub} $	55

3.5.3	$ V_{tb}^* V_{td} $	57
3.5.4	ϕ_1	58
3.5.5	ϕ_2	59
3.5.6	ϕ_3	60
3.5.7	K meson physics	61
3.5.8	Present statue of unitarity triangle determination	62
3.6	New physics search in B physics	63

— Notation —

単位系 自然単位系を用いる .

$$c = \hbar = 1$$

(すべての単位をエネルギー - の単位であらわす .)

$$\text{例 : } 1\text{cm} = 5.0677 \times 10^{10} \text{ MeV}^{-1}, 1\text{sec} = 1.519 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$$

$$\text{陽子質量 } 938.3 \text{ MeV}$$

$$\text{重力定数 } G_N = 6.707 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$$

4元ベクトル

$$\text{座標 } x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$$

$$\text{運動量 } p^\mu = (E, \vec{p})$$

$$\text{内積 } a \cdot b = a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = (a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

反対称テンソル

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ が } (0123) \text{ の偶置換の時} \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ が } (0123) \text{ の奇置換の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Dirac の 行列

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \gamma_5^\dagger$$

$$\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger$$

荷電共役行列

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$$

Lorentz 変換の生成子

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

— Useful formulae —

Fiertz 変換 (演算子に対して)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \overline{\psi}_a \psi_b \overline{\psi}_c \psi_d \\ \overline{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b \overline{\psi}_c \gamma^\mu \psi_d \\ \frac{1}{2} \overline{\psi}_a \sigma_{\mu\nu} \psi_b \overline{\psi}_c \sigma^{\mu\nu} \psi_d \\ \overline{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_5 \psi_b \overline{\psi}_c \gamma_5 \gamma^\mu \psi_d \\ \overline{\psi}_a \gamma_5 \psi_b \overline{\psi}_c \gamma_5 \psi_d \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} S \\ V \\ T \\ A \\ P \end{pmatrix}_{(a,b ; c,d)} \\
 &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ V \\ T \\ A \\ P \end{pmatrix}_{(a,d ; c,b)}
 \end{aligned}$$

Gamma gymnastics

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu \gamma^\nu &= \eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \\
 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \eta^{\rho\nu} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma \\
 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 &= \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \\
 \text{tr}(\gamma^\mu) &= \text{tr}(\gamma_5) = \text{tr}(\sigma^{\mu\nu}) = \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu) = \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) \\
 &= \text{tr}(\text{odd numbers of } \gamma^{0\sim 3}) = 0 \\
 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \\
 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
 \end{aligned}$$

第0章 予備知識

0.1 弱い相互作用概説

0.1.1 崩壊とパリティの破れ

我々のまわりにはたくさんの多様な現象が見られる．それらの根本を突き詰めていくと結局は四つの基本相互作用に帰着される．その四つの相互作用とは，重力，電磁気力，強い相互作用，弱い相互作用である [1]．

重力は天体や宇宙の研究に不可欠であり，Newton の逆二乗則や Einstein の一般相対論で記述されてきた．(量子的な重力理論はまだ未完成である．)

電磁気力は我々の日常の世界において最も普遍的な相互作用であり，その取扱いは古典的には Maxwell 方程式，量子論的には量子電磁力学という美しい体系ができあがっている．

強い相互作用は原子核やハドロンを形成する力である．湯川の中間子論に始まって現在の素粒子物理学では量子色力学で説明できると考えられている．

最後に残った弱い相互作用だが，これは歴史的には 崩壊という原子核現象で発見された．原子核は中性子と陽子からなるが，ある種の原子核では中性子が次の崩壊をする，

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

この崩壊による原子核の寿命は強い相互作用によるもの(崩壊；ヘリウム原子核を放出する)や電磁相互作用によるもの(崩壊； β 線を放出)に比べて圧倒的に長く，別の種類の相互作用によるものと考えられた(重力は原子核レベルでは非常に小さくて無視できる．)中性子以外の素粒子にも長寿命(約 $10^{-6} \sim 10^{-10}$ 秒程度)で崩壊するものがある．例をあげると，

粒子	崩壊モード	平均寿命 (秒)
π^+	$\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$	2.6×10^{-8}
μ^-	$\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	2.6×10^{-8}
Λ	$\rightarrow p + \pi^-$	2.6×10^{-8}

これらも弱い相互作用によるものと考えられる．(強い相互作用で崩壊する粒子の例としては $\rho \rightarrow \pi\pi$ があり，この平均寿命は 4.3×10^{-24} 秒，電磁相互作用での崩壊の例としては平均寿命 8.4×10^{-17} 秒の $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ がある．)

弱い相互作用の本質について考える前に，その特徴を見てみよう．その名が示すように力の強さが弱い(ために崩壊の寿命が長くなる)ことの他に，フレーバー(クォーク，レプトンの種類)が変る，パリティが破れるという他の相互作用には見られない性質がある．

パリティ(空間反転)によって座標の空間成分は反転される，

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad (x^\mu \rightarrow x_\mu),$$

この時，スカラー - は不変で，ベクトル，テンソルは添字の足の上下が逆転し，また擬スカラー - ，擬ベク

トル等では全体の符号も逆転する：

Scalar	S	\rightarrow	S
Pseudo scalar	P	\rightarrow	$-P$
Vector	V^μ	\rightarrow	V_μ
Axial vector	A^μ	\rightarrow	$-A_\mu$
Tensor	$T^{\mu\nu}$	\rightarrow	$T_{\mu\nu}$

K^+ 中間子は弱い相互作用で $\pi^+\pi^0$ にも $\pi^+\pi^+\pi^0$ にも崩壊することが観測されている．一方 π 中間子は擬スカラー - 粒子であるので， π 中間子 2 個の状態のパリティは + ， π 中間子 3 個の S 波の状態のパリティは - であり， K^+ 中間子の崩壊ではパリティが保存されていないことになる．

自然界ではパリティが保存すると信じられていた頃は $\pi^+\pi^0$ に崩壊する粒子と $\pi^+\pi^+\pi^0$ に崩壊する粒子は別のものだと考えられ，それぞれ θ ， τ とよばれていた（この τ は現在知られている τ レプトンとは異なる粒子である．）しかしこの θ と τ 両者の質量と寿命が K 中間子とほぼ等しかったため，その理由を求める物理学者の頭を悩ませていた．Lee と Yang [2] は二つは同じ粒子であり，パリティが破れているために 2 個の π 中間子にも 3 個の π 中間子にも崩壊できるのだと指摘し，同時にパリティの破れを検証するための実験をいくつか提案した．Wu ら [3] はその中の一つの偏極させた Co^{60} の崩壊における放出電子の角分布を調べる実験を行い，パリティが本当に破れていることを実証した（物理学会誌に当時の模様を伝える興味ある記事がある [4]）．

実は弱い相互作用においてはパリティだけでなく荷電共役変換（粒子 - 反粒子変換）に対する対称性も破れ，両者の積の CP 変換の対称性もわずかではあるが破れていることが知られている．各々の例を挙げてみよう．

ニュートリノは質量が 0（たとえあっても数 eV 以下）であり（質量があったとしても，ほぼ）光速で運動している，その運動の方向とスピンの向きは完全に平行かもしくは反平行であるとしてよい（helicity が ± 1 をとるという．）実験によると陽電子や + の電荷のミュオンと同時に生成されるニュートリノは運動の向きとスピンの向きが常に反平行（helicity - 1）で，電子や負電荷のミュオンと生成される反ニュートリノは常に平行（helicity + 1）である．粒子と反粒子で helicity が異なっているため荷電共役変換対称性が破れている．

中性 K 中間子には二種類あり，3 個の π 中間子に崩壊する寿命の長い K_L と，主に 2 個の π 中間子に崩壊する短命の K_S があり，各々はストレンジネス + 1 の K^0 と - 1 の \bar{K}^0 の状態の重ね合わせで記述される．もし自然が CP を保存しているなら

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= [|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle]/\sqrt{2} & (CP -), \\ |K_S\rangle &= [|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle]/\sqrt{2} & (CP +), \end{aligned}$$

とあらわされる（ただしここでは $CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ とした．）ところが 1964 年に K_L が 2 個の π の状態（CP +）にも崩壊することが観測され [5] CP の破れが確認された．相対論的不変性を持つ局所的な相互作用だけで記述される理論（普通の場合の理論）においては，CP にさらに時間反転の変換をかけた CPT の変換のもとでの対称性が保証されている（CPT 定理）ので CP の破れは同時に時間反転の破れを意味している．

0.1.2 Fermi 理論

中性子の崩壊 ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) を記述する Hamiltonian を求めるため，

$X(X^\dagger)$: 粒子 X を消滅（生成），あるいは X の反粒子を生成（消滅）する演算子，

を導入する．いま必要なのは， $n, p^\dagger, e^\dagger, \nu_e$ ，であるがバリオン数とレプトン数を保存させるため n と p^\dagger, e^\dagger と ν_e ，をそれぞれ組み合わせることにする．

スピノル2つ (η, ξ) で作られる独立な量は

$$\begin{aligned} S &: \bar{\eta}\xi, \\ P &: \bar{\eta}\gamma_5\xi, \\ V &: \bar{\eta}\gamma_\mu\xi, \\ A &: \bar{\eta}\gamma_\mu\gamma_5\xi, \\ T &: \bar{\eta}\sigma_{\mu\nu}\xi, \end{aligned}$$

ただし $\bar{\eta} = \eta^\dagger\gamma^0$ ，である．一方，実験によると 崩壊で放出される反ニュートリノの helicity は常に +1，同じく電子の helicity は，質量を無視する近似で，-1 であることから，崩壊に関わるレプトンは常に

$$\frac{1-\gamma_5}{2}e \equiv e_L, \quad \frac{1-\gamma_5}{2}\nu_e \equiv \nu_{eL},$$

と chirality が左巻き (γ_5 の固有値が -1) のものだけが現れてる．この時，

$$\bar{e}_L\nu_{eL} = e^\dagger \left[\frac{1-\gamma_5}{2} \right]^\dagger \gamma^0 \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_e = \bar{e} \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \right] \left[\frac{1-\gamma_5}{2} \right] \nu_e = 0$$

となって S は 0 になる．同様に P も T も 0 になる．また

$$\bar{e}_L\gamma_\mu\gamma_5\nu_{eL} = -\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL}$$

より，レプトンの部分はいつも

$$\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} = \frac{1}{2}\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e$$

で書けることになる．よって Lorentz 不変性から Hamiltonian は次の形で表される：

$$\begin{aligned} H_\beta &= f \bar{p}\gamma_\rho(g_V - g_A\gamma_5)n \bar{e}\gamma^\rho(1-\gamma_5)\nu_e + (\text{h.c.}) \\ &\equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{p}\gamma_\rho(1-\lambda\gamma_5)n \bar{e}\gamma^\rho(1-\gamma_5)\nu_e + (\text{h.c.}). \end{aligned}$$

実験によると $G_F = 1.167 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ ， $\lambda \cong 1.25$ である．

同様にして弱い相互作用による他の過程を表す Hamiltonian を求めると；

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu : H_\mu = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma_\rho(1-\gamma_5)\nu_e \bar{\nu}_\mu\gamma^\rho(1-\gamma_5)\mu + (\text{h.c.}).$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu : H_{\mu p} = \frac{G_{\mu p}}{\sqrt{2}}\bar{n}\gamma_\rho(1-\lambda'\gamma_5)p \bar{\nu}_\mu\gamma^\rho(1-\gamma_5)\mu + (\text{h.c.}).$$

これらの様に4つのフェルミオンの積で書かれる結合を Fermi 結合という．上の結果で特徴的なことは

- レプトン部分は常に V - A 型．
- ハドロン部分もおおよそ V - A 型 (実験では $\lambda \approx \lambda' \approx 1.25$)

よって，ハドロン部分の V - A 型からの小さなずれを強い相互作用の影響によるものとして，弱い相互作用は常に V - A 型の結合で記述できると考えることにする．例えば 中間子の崩壊もクォーク模型で考えれば

$$\bar{u}\gamma_\rho(1-\gamma_5)d \bar{\mu}\gamma^\rho(1-\gamma_5)\nu_\mu$$

と書ける．)

また結合定数 (Fermi 定数とよぶ) の大きさも

$$G_F \approx G_\mu \approx G_{\mu p}$$

であることが知られており, 相互作用の型と大きさは過程によらず普遍的なようである. どうしてこのような状況が実現されるかを次の節で考えよう.

0.1.3 Gauge 理論の導入

前節でみた弱い相互作用の型と大きさの普遍性について考えて見よう. そのお手本として電磁相互作用を取り上げる. いわゆる電荷には保存量としての電荷と電磁場との相互作用の強さを表す量としての二つの側面がある. 両者は必ずしも一致する必要はない (例えば保存量にはレプトン数やバリオン数があるがそれらに対応した力は観測されていない.)

まず保存量を考える.

$$a + b + \dots \rightarrow A + B + \dots$$

という反応を表す Hamiltonian を生成・消滅の演算子を使って表すと,

$$H \propto A^\dagger B^\dagger \dots ab \dots$$

粒子 X の電荷を Q_X とすると, 電荷の保存は Hamiltonian が $X \rightarrow \exp(i\lambda Q_X)X$ という位相変換の下で不変であることによって表される:

$$H \rightarrow \exp[i\lambda\{(Q_a + Q_b + \dots) - (Q_A + Q_B + \dots)\}]H$$

すなわちある変換の下での対称性が保存量と結びついている.

さて電磁場と相互作用するフェルミオン ψ の満たす運動方程式は

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - m\psi = 0.$$

この時, 電磁場との相互作用の強さは q で示される. この方程式は先程の位相変換に対して, λ が定数ならば方程式全体に位相がかかるだけで形を変えないが λ が位置によって値が変わると ($\lambda = \lambda(x)$),

$$\exp(i\lambda Q)[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - m\psi - Q\partial_\mu\lambda\gamma^\mu\psi] = 0,$$

となり別の方程式になってしまう. しかしながら電磁場にはゲージ変換の自由度,

$$\phi \rightarrow \phi + \partial\chi/\partial t, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\chi,$$

(まとめると $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi$) があつた. これを使うと方程式は

$$\exp(i\lambda Q)[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - m\psi + q\partial_\mu\chi\gamma^\mu\psi - Q\partial_\mu\lambda\gamma^\mu\psi] = 0,$$

となり, $\chi = (Q/q)\lambda$ ととれば方程式の形は変わらない. 複数の粒子が存在する場合に拡張できるためには, ゲージ変換 χ には粒子依存性が無いので, どの粒子に対しても (Q/q) が同じでなければならず, このため保存電荷と相互作用の強さが常に比例することになる (電荷の単位を適当にとれば一致させられる.)

結局,

$$\psi_n \rightarrow \exp[i\lambda(x)Q_n]\psi_n, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda(x),$$

という局所的 (位置によって連続的に値を変える) 変換の下での不変性を要求することにより, 相互作用の型と大きさの普遍性が導かれることになる. 又, 逆にこの不変性の要求から電荷の保存則を導くこ

ともできる (Noether の定理) . 以後はベクトル場の変換だけでなく粒子の方の変換もまとめてゲ - ジ変換とよぶことにする .

では次に弱い相互作用でも同様のことがいえないか考えてみよう . 電荷の場合の位相変換に対応するような何らかの変換を求めてそれに対する不変性を要求してみることにする . まず電磁相互作用の場合をもう一度ながめてみると $\psi_n \rightarrow \exp(i\lambda Q_n)\psi_n$ という変換に対する電荷保存則は

$$\partial^\mu J_\mu^{EM} = 0 \quad (J_\mu^{EM} = \sum_n \bar{\psi}_n \gamma_\mu Q_n \psi_n)$$

というカレントの保存として表すことができ , 電磁相互作用は光子 A_μ とこのカレントとの結合として書かれる . 弱い相互作用に現れるカレントは

$$\bar{d}_L \gamma_\mu u_L, \quad \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L, \quad \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_\mu \mu_L, \dots,$$

などであるが , これらのカレントに対応するゲ - ジ変換 (対称性) はどんなものであろうか ? u クォークと d クォーク , ニュートリノと荷電レプトンと異なる粒子を結び付ける変換でなくてはならない .

ここでアイソスピンという概念を思いだそう . 陽子と中性子は一見異なる粒子だが , 両者は核子というアイソ二重項をなす一つの粒子としてまとめることができた (アイソスピン上向きのものが陽子で , 下向きが中性子 .) これにならって弱アイソスピンというものを考え

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad l_{eL} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad l_{\mu L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix},$$

と二重項を作る . すると先ほどのカレントは

$$\bar{d}_L \gamma_\mu u_L = \bar{q}_L \gamma_\mu \tau^- q_L, \quad \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L = \bar{l}_{eL} \gamma_\mu \tau^+ l_{eL}, \dots$$

($\tau^\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/2$ で τ^a ($a = 1 \sim 3$) はパウリ行列) と表すことができる . この形から , 求める変換は τ^a で作られる変換 , すなわち弱アイソスピン空間での回転としよう :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{up} \\ \psi_{down} \end{pmatrix} \rightarrow \exp[i\theta^a \tau^a / 2] \begin{pmatrix} \psi_{up} \\ \psi_{down} \end{pmatrix} \equiv U\psi.$$

この変換を局所的なものとするとき電磁相互作用の時と同様に運動方程式の形が変わってしまう . そこで電磁場に相当するベクトル場 W_μ を導入して , その場も変換されるものとしよう .

$$\begin{aligned} & i\gamma^\mu (\partial_\mu - igW_\mu) \psi \\ \rightarrow & i\gamma^\mu (\partial_\mu - igW'_\mu) U\psi \\ = & U [i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + iU^\dagger \partial_\mu U \gamma^\mu \psi + gU^\dagger W'_\mu U \psi], \end{aligned}$$

ここで g は相互作用の強さを表す結合定数である . この時方程式の形が変わらないためには

$$U^\dagger \partial_\mu U - igU^\dagger W'_\mu U = -igW_\mu$$

であればよい (ψ が二重項であるので W_μ は行列で表される .) すなわち場 W_μ が

$$W'_\mu = UW_\mu U^\dagger - (i/g) \partial_\mu U U^\dagger$$

というゲ - ジ変換を受ければよい . 電磁相互作用の時は $U = \exp(i\lambda Q) \times$ (単位行列) ととれば上式は見慣れたゲ - ジ変換を再現する .

ここで W_μ は τ^a の数と同じだけの成分をもつ行列であることに注意しよう . 具体的には

$$W_\mu = W_\mu^a \tau^a / 2 \equiv \begin{pmatrix} W_\mu^3 / 2 & W_\mu^+ / \sqrt{2} \\ W_\mu^- / \sqrt{2} & -W_\mu^3 / 2 \end{pmatrix}.$$

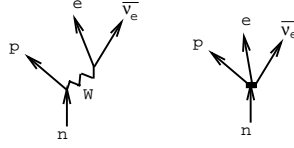


図 1: W-current 結合と Fermi 結合

ここで現れた W_μ^\pm が 1983 年に CERN で発見された W ボソンである。 W ボソンの質量は約 80 GeV と大きいので低エネルギーの実験では見えない、そのため図 1 のように W とカレントとの結合が一点に縮約されて Fermi 結合を与える。このとき有効 Hamiltonian が次の様に与えられて、相互作用の大きさの普遍性が示せる。

$$\begin{aligned} & g\bar{\psi}_1\gamma^\mu\tau^+\psi_1\langle W_\mu^+W_\nu^-\rangle g\bar{\psi}_2\gamma^\nu\tau^-\psi_2 \\ & \simeq (g^2/M_W^2)\bar{\psi}_1\gamma^\mu\tau^+\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\mu\tau^-\psi_2 \\ & \Rightarrow G_F/\sqrt{2} = g^2/4M_W^2. \end{aligned}$$

さてゲ - ジ変換に対する不変性の要求から相互作用の型の決定と大きさの普遍性が示せたわけだが、新たな問題が生じてきた。それは

1. 実験では W ボソンは大きい質量 (約 80 GeV) をもつが、その質量項、 $M_W^2\text{Tr}(W_\mu W^\mu)$ 、はゲ - ジ変換の下での不変性からは禁止されてしまう。たとえ質量項は対称性を破ってかわまないとして手で質量を与えても理論はくりこみ不可能であり予言力を失ってしまう (質量 0 の時はくりこみ可能)。
2. 弱アイソスピン空間での回転は電荷の異なるものを同時に変換するため電磁相互作用での位相変換と可換でない。すなわち電磁相互作用と弱い相互作用は互い独立したのではなく統一的な取り扱いが必要となる。

これらの問題を解決したのが Weinberg-Salam 模型である [6]。

0.1.4 Weinberg-Salam 模型の成功

ゲ - ジ不変性の要求により弱い相互作用の系統的な記述ができたが、電磁相互作用との統一的な取り扱いが必要なこととくりこみ可能性を損なわずに W ボソンに質量を与えるという二つの問題があった。

前者に対する解答は Glashow や Salam, Ward によって考えられた [7]。昔のアイソスピンの多重項に属するハドロンの電荷 Q はアイソスピンの第三成分 I_3 と hypercharge Y によって、 $Q = I_3 + Y/2$ とあたえられた。すなわち電荷はアイソスピンと hypercharge の組み合わせによって得られた。これに習って weak hypercharge Y_W を導入して、その値をクォークの二重項 $(u, d)_L$ は $1/3$ 、レプトンの二重項 $(\nu_e, e)_L$ は -1 とすれば電荷はやはり弱アイソスピンの第三成分 I_{W_3} とで

$$Q = I_{W_3} + \frac{1}{2}Y_W$$

と与えられる。そこで weak hypercharge に対応する位相変換を考え、その変換と弱アイソスピン空間での回転による不変性を同時に要求することにする。

弱アイソスピン空間での回転は後で述べる群論のことばでいうと $SU(2)$ 群による変換になり、位相変換は $U(1)$ 群による変換といわれる。ここで行うことは数学的には $SU(2) \times U(1)$ という直積群の変換をゲ - ジ変換にとることである。このゲ - ジ変換に対応して、前節で見たように弱アイソスピン空間での回転から 3 つ、weak hypercharge の位相変換からは 1 つのベクトル場が必要とされる。その内 2 つが W ボソン (電荷を持つので自由度が 2 つある) であり残り 2 つの場が組み合わさって光子と Z ボソンになる。こうして弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に取り扱うことができる。

次に W や Z に質量を与える方法であるが、ゲ - ジ変換に伴うベクトル場に質量を持たせるにはその変換に対する対称性を破らなければならない。明白な破れで質量をもたせると理論はくりこみ不可能になることが知られており、これは採用することはできない。対称性の破り方にはもう一つ自発的な破れというものがあり、これは作用でなく真空が対称性を破っている。例えば強磁性体の温度を下げていくとスピンはある一方向にそろっていくようになるが、この場合系を記述する Hamiltonian は回転対称を持つのに基底状態は回転対称ではないわけである。

連続的な変換が自発的に破れると質量 0 の粒子 (南部・Goldstone 粒子) が現れることが証明できる。(後で例を示す。) 局所的なゲ - ジ変換に対する対称性が自発的に破れると、その南部・Goldstone 粒子がベクトル場の縦波成分として吸収されベクトル場が質量を持つ。これを Higgs 機構という。この場合は理論がくりこみ可能であることが 't Hooft によって示された。

Weinberg-Salam 模型は $SU(2) \times U(1)$ ゲ - ジ対称性に基づく電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論である。その対称性は自発的に

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$$

と破れ、この時 Higgs 機構により W と Z は質量を与えられるが光子は残った $U(1)_{EM}$ 対称性のため質量零であり続ける。この模型は現象論的にも中性カレントの存在や W, Z ボソン質量の予言など数々の成功を収めている。

0.2 ゲ - ジ理論入門

0.2.1 対称性と群

対称性は物理において最も重要な概念の一つである。対称性を考えることにより問題を簡単化したり統一的な記述をすることができる。対称性の役立つ具体例をあげると、Hamiltonian の形の制限、エネルギー - スペクトルの縮退度の計算、選択則の発見、保存則との結びつきなどがある。対称性には離散的なものや連続的なものがあり、前者の例としては空間反転 (P)、時間反転 (T)、荷電共役変換 (C)、後者には Lorentz 変換、位相変換、ハドロンの $SU(3)$ 変換があげられる。

対称性を取り扱う強力な数学的手法に群論がある。以下では群論についての簡単な解説を行う [8]。

群の定義 集合 $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ の要素に対して演算 $g_A \circ g_B$ が定義されていて次の条件を満たす時、 G はその演算に関して群をなすという。

1. 任意の $g_A, g_B \in G$ に対して $g_A \circ g_B \in G$.
2. 単位元の存在 ; $\exists e \in G, e \circ g_A = g_A \circ e = g_A$ for $\forall g_A \in G$.
3. 逆元の存在 ; for $\forall g_A \in G \exists g_A^{-1} \in G, g_A^{-1} \circ g_A = g_A \circ g_A^{-1} = e$.
4. 結合則の成立 ; $g_A \circ (g_B \circ g_C) = (g_A \circ g_B) \circ g_C$.

群の例 離散群と連続群の例をそれぞれ 1 つずつあげる。

1. 空間反転 $\{E, P\}$: $E\vec{x} = \vec{x}, P\vec{x} = -\vec{x}$.
 $EE = E, EP = PE = P, PP = E$.
 単位元 : E , E の逆元は E , P の逆元は P .
 結合則の成立は明らか。
2. 平面での回転

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta').$$

$$\text{単位元 : } R(0), \text{ 逆元 : } R(-\theta).$$

$$\text{結合則 : } R(\theta_1)[R(\theta_2)R(\theta_3)] = R(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = [R(\theta_1)R(\theta_2)]R(\theta_3).$$

群の要素がすべて可換の場合を可換群または Abelian とよぶ。上の二つの例はいずれも可換群である。そうでないものを非可換群または non-Abelian という。三次元での回転がその例である。

群をなすある集合の部分集合がそれだけでまた群をなす時、その部分集合を部分群という。例えば三次元空間での回転から z 軸のまわりの回転だけを取り出すとそれは部分群をなしている。

二つの群 G_1 と G_2 の各要素による変換を同時に考える時、それを直積群 $G_1 \times G_2$ による変換という。

ここで群の表現という重要な概念を説明しておく。群の要素間の演算は抽象的な代数関係として与えられるが、それを具体的な形であらわしたものを表現という。表現としてよく用いられるものには行列や微分演算子などがある。さっきの例 1 は $\{E, P\} \Rightarrow \{1, -1\}$ として普通のかけ算を演算にとれば表現できる。例 2 での $R(\theta)$ はすでに行列による表現を与えてあるが、これは $e^{i\theta}$ でも表現できる。また群の要素の表現の基底となるものも表現とよばれる。三次元での回転群で全角運動量 $1/2$ の粒子が 2 次元表現をなすといわれる場合がこれにあたる。

ゲ - ジ変換は場を時空の各点ごとに連続的に変化させる変換であった。この変換に対応する群に Lie 群がある。これは群の各要素が連続的なパラメ - タで決定されていて、そのパラメ - タの変化に従って対応する要素も連続的に変化していくものである。具体例として三次元の回転群を考えてみよう。

量子力学での角運動量の議論を思いだすと、三次元での回転は演算子 J_x, J_y, J_z を使って

$$R(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = \exp[i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)],$$

と表され、演算子の間には次の交換関係が成立していた、

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \quad (a, b, c = x \sim z).$$

Lie 群のことばでは群を決定づける骨組みともいべき J_x, J_y, J_z の演算子を生成子 (generator) とよび、生成子間の交換関係を Lie 代数という。Lie 代数を決定している定数 (上での ϵ_{abc}) を構造定数 (structure constant) とよぶ。

一般の Lie 群の場合も生成子 (T_α) と構造定数 ($f_{\alpha\beta\gamma}$) で記述される；

$$\begin{aligned} g(\xi_\alpha) &= \exp(i\xi_\alpha T_\alpha), & (\xi_\alpha \text{ は変換のパラメ - タ}) \\ [T_\alpha, T_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma. \end{aligned}$$

角運動量の議論では各状態が角運動量の大きさと z 軸方向の成分とで指定され、 $|J, J_z\rangle$ 、回転群の $2J + 1$ 次元表現をなしていた。一般の Lie 群の場合では (基底としての) 表現をその次元でよぶのが普通である。生成子自身が基底になる表現が存在しこれを随伴表現 (adjoint representation) とよぶ。回転群の場合は 3 次元表現がこれにあたる。

いろいろな Lie 群の例を以下に示そう。

- n 次元特殊ユニタリ - 変換 : $SU(n)$ (特殊とは $n \times n$ ユニタリ - 変換行列の行列式が 1 の場合をさす。) 特殊でない $U(n)$ は $SU(n)$ と位相変換 $U(1)$ との直積であらわされる。
- n 次元特殊直交変換 : $SO(n)$
- Lorentz 変換 : $SO(3, 1)$
- 例外群 : G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 .

ゲ - ジ理論とそこで使われている群を挙げていくと、Weinberg-Salam 模型では $SU(2) \times U(1)$ 、量子色力学では $SU(3)$ 、大統一理論では $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 等がよく用いられる。一般相対論も実は Poincare 群 (時空の並進と、三次元の回転を含む Lorentz 変換のなす群) のゲ - ジ理論であると見なせることが内山によって示された [9]。

0.2.2 ゲ - ジ理論

ゲ - ジ理論では最初にある Lie 群を考え, その群をなす局所変換の下での不変性を理論に要求することから相互作用の形を決定していく [10]. 選んだゲ - ジ群の要素をその生成子 T^a を用いて $U = \exp(i\theta^a T^a)$ と書き, 群の r 次元表現をなすフェルミオン場 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)^T$ を考える. 以後では

$$\sum_{n=1}^r \bar{\psi}_n \Gamma \psi_n = \bar{\psi} \Gamma \psi \quad (\Gamma = 1, \gamma_\mu, \dots)$$

と表し, いちいち表現の添字は書かないことにする.

さてフェルミオン場 ψ の Lagrangian の運動項は

$$L_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

で与えられるが, $\psi \rightarrow U\psi$ の変換の下でこれは (U が時空の位置によって変化する時) 不変でない. そこでゲ - ジ場 $A_\mu = A_\mu^a T^a$ を導入し, 微分を共変微分 $\partial_\mu - igA_\mu$ で置き換える. この時 A_μ も変換を受けて

$$(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \rightarrow (\partial_\mu - igA'_\mu)(U\psi) = U(\partial_\mu - igA_\mu)\psi$$

となれば不変になる. これから A_μ の変換が次のように決定される;

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - (i/g)\partial_\mu U U^\dagger.$$

無限小変換 $U \simeq 1 + i\theta^a T^a$ では以下のようになる;

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + i\theta^b T^b A_\mu - A_\mu i\theta^c T^c + (1/g)\partial_\mu \theta^b T^b \\ &= \{A_\mu^a - f^{abc}\theta^b A_\mu^c + (1/g)\partial_\mu \theta^a\} T^a. \end{aligned}$$

結局, 運動項にゲ - ジ不変性を要求したことからフェルミオン場とゲ - ジ場の相互作用が決定されたことになり Lagrangian が次のように与えられる.

$$L_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu)\psi.$$

フェルミオンの右巻き成分 ψ_R と左巻き成分 ψ_L が群の同じ表現に属している場合 (vector theory とよばれる. 例は量子色力学) は質量項 $m\bar{\psi}\psi$ が許されるが, そうでない場合 (chiral theory. 例は Weinberg-Salam 模型) ではゲ - ジ不変性から禁止される. この場合に質量を与えるにはスカラー - 場との湯川結合と自発的対称性の破れを用いる (次節参照)

次にゲ - ジ場自身の運動項を与えねばならない. 電磁気学で学んだ電磁場の Lagrangian は

$$L_{\text{EM}} = (-1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

であり, これはゲ - ジ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ に対して不変であった. 一般の場合もこれに習ってゲ - ジ場 A_μ から場の強さ (field strength) $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ を作り

$$L_{\text{gauge}} = (-1/4)F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = (-1/2)\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}),$$

としてみよう (ただし, ここでは $\text{Tr}(T^a T^b) = (1/2)\delta^{ab}$ の規格化を用いた.) 今の場合では Lagrangian がゲ - ジ不変であるためには $F_{\mu\nu}$ 自身がゲ - ジ不変である必要はなく,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger$$

と変換すればよい (実際, $F_{\mu\nu}^a$ は群の adjoint 表現になるので $U(1)$ の時以外は不変でない) ところが

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &\rightarrow \partial_\mu \{U A_\nu U^\dagger - (i/g)\partial_\nu U U^\dagger\} - \partial_\nu \{U A_\mu U^\dagger - (i/g)\partial_\mu U U^\dagger\} \\ &= U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)U^\dagger \\ &\quad + \partial_\mu U A_\nu U^\dagger + U A_\nu \partial_\mu U^\dagger - \partial_\nu U A_\mu U^\dagger + U A_\mu \partial_\nu U^\dagger \\ &\quad - (i/g)\partial_\nu U \partial_\mu U^\dagger + (i/g)\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger\end{aligned}$$

となり $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ だけでは求める $F_{\mu\nu}$ を作れない. 上式の最終行とその前の行を相殺するような項をさらに加えることを考えると, それは A_μ の二次でなければならない. 答は $[A_\mu, A_\nu]$ であり, これは

$$[A_\mu, A_\nu] \rightarrow U[A_\mu, A_\nu]U^\dagger - (i/g)(\text{相殺項})$$

と変換することがわかるので,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu],$$

を採用する. 最後の二次の項のため Lagrangian から得られる運動方程式が非線形な項を持つのが non-Abelian ゲ - ジ理論の特徴である. ベクトル場の質量項は $M^2 \text{Tr}(A_\mu A^\mu)$ という形を持つが, これはゲ - ジ不変でないためゲ - ジ変換の下での対称性が成立する限りゲ - ジ場は質量を持ってない.

最後にスカラー - 場の導入についてコメントしておこう. 群のある表現に属して非自明な変換をうけるスカラー - 場を理論に加える際にも, スカラー - 場にかかる微分を表現に対応した共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ におきかえればゲ - ジ不変な Lagrangian が得られる. 例えば複素スカラー - 場の運動項は

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \Rightarrow D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi,$$

とすればよい.

フェルミオン場とスカラー - 場の湯川相互作用やスカラー - 場同士の相互作用はゲ - ジ変換の下で不変になる組み合わせだけが許される. $SU(2)$ 群の場合でいくつか例を見てみよう.

1.

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \chi_R, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_p \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

この時 $\bar{\psi}_1 \psi_2 \phi = \bar{u}_L \chi_R \phi_p + \bar{d}_L \chi_R \phi_n$ で不変である.

2.

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

この時 $\bar{\psi}_1 (\sigma^a / 2) \psi_2 \phi^a$ で不変である.

0.2.3 対称性の自発的な破れと Higgs 機構

ゲ - ジ対称性の要求によって相互作用の形が厳しく制限されることを知った. しかしながら現実の世界では対称性が破れていることが多い. Weinberg-Salam 模型に於いても電子とニュ - トリノを弱アイソスピンの二重項にとったが, 両者の質量は異なるので弱アイソスピン空間での回転対称性は破れているわけである. 対称性が成立している限りはゲ - ジ場の質量は 0 でなければならないが, 実験で観測された W と Z は質量を持っているので, やはり対称性が破れていなければならない.

ここではゲ - ジ理論の利点を損なわずに現実的な模型をつくるための方法として対称性の自発的な破れと Higgs 機構について紹介する.

自発的対称性の破れ

まず具体例として次の模型を考える .

$$\begin{aligned} L &= (1/2)(\partial_\mu \rho)^2 + (1/2)(\partial_\mu \eta)^2 - V(\rho, \eta), \\ V(\rho, \eta) &= (\kappa^2/2)(\rho^2 + \eta^2) + (\lambda/4)(\rho^2 + \eta^2)^2. \end{aligned}$$

この Lagrangian は次の大域的変換 (変換が位置によらず一定な変換) の下で不変である ;

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rho' \\ \eta' \end{pmatrix}.$$

ポテンシャル $V(\rho, \eta)$ の様子を $\kappa^2 < 0$ の場合について図 2 に示しておく . $\kappa^2 < 0$ の場合は ρ, η の質

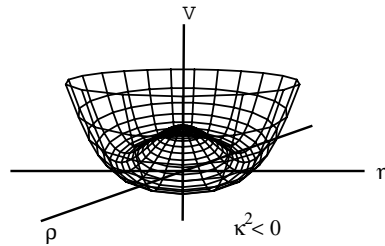


図 2: ポテンシャル $V(\rho, \eta)$

量が負になっているようで物理的な状態に対応していない . そこでポテンシャルの値が最小になる点を一つ $(\rho, \eta) = (0, \sqrt{-\kappa^2/\lambda})$ と選び , $\tilde{\eta} = \eta - \sqrt{-\kappa^2/\lambda}$ を用いて Lagrangian を書き換える ;

$$\begin{aligned} L &= (1/2)(\partial_\mu \rho)^2 + (1/2)(\partial_\mu \tilde{\eta})^2 + \kappa^2 \tilde{\eta}^2 \\ &\quad - \lambda \sqrt{-\kappa^2/\lambda} \tilde{\eta} (\rho^2 + \tilde{\eta}^2) - (\lambda/4)(\rho^2 + \tilde{\eta}^2)^2 + (\kappa^2/4\lambda) \end{aligned}$$

この Lagrangian はもはや

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$$

の変換に対して不変ではないが , ρ が質量 0 になり , $\tilde{\eta}$ が正の質量 $-2\kappa^2$ を持っている . これは元の Lagrangian 自身は対称性を持っていたがエネルギー - の基底状態 (真空) がその対称性を破っていることになっている . このように真空が対称性を破る場合を自発的な対称性の破れとよぶ .

ここで自発的な対称性の破れに関わる重要な定理を証明ぬきであたえておく (証明は参考文献に挙げた教科書を見よ):

南部・Goldstone の定理

Lagrangian が連続的な変換の下で不変であり , その対称性が自発的に破れると質量零の粒子 (南部・Goldstone 粒子) が現れる . この時の質量零の粒子の数は対称性の自由度の内 , 破れたものの数と一致する .

先ほどの例では ρ, η の回転の自由度一つが自発的に破れたので粒子 ρ の質量が零になった .

Higgs 機構

前の例では位置によらない一定の変換の下での対称性が破れた場合を見た．では次に局所的なゲ - ジ変換が自発的に破れるとどうなるかを見てみよう．前の模型で $\phi \equiv (\eta + i\rho)/\sqrt{2}$ として Lagrangian を書きなおすと；

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \kappa^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4.$$

この時 ρ, η の変換は $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$ とあらわせて、ポテンシャルは $|\phi|^2 = -(\kappa^2/2\lambda)$ で最小値をとる．ここで ϕ の変換を局所化してゲ - ジ理論に移行させる；

$$L = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \kappa^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

スカラー - 場 ϕ が $v = \sqrt{-\kappa^2/\lambda}$ の値をとるときがエネルギー - の最小値を与えること (ϕ が真空期待値 v をとるといふ) を考えて、場 ϕ を

$$\phi = e^{-i\xi(x)} [v + \tilde{\eta}(x)] / \sqrt{2}$$

とパラメトライズしなおして、次のゲ - ジ変換を行う；

$$\phi \rightarrow e^{i\xi(x)} \phi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi(x)$$

この時、理論のゲ - ジ不変性を用いて Lagrangian は次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} L &= (1/2) |(\partial_\mu - igA_\mu)(v + \tilde{\eta})|^2 - (\kappa^2/2)(v + \tilde{\eta})^2 - (\lambda/4)(v + \tilde{\eta})^4 - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= (1/2)(\partial_\mu \tilde{\eta})^2 - \lambda v^2 \tilde{\eta}^2 - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (1/2) g^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ &\quad + (v + \tilde{\eta}/2) \tilde{\eta} A_\mu A^\mu - \lambda v \tilde{\eta}^3 - (\lambda/4) \tilde{\eta}^4. \end{aligned}$$

この Lagrangian を見てわかることは

- ゲ - ジ場 A_μ が質量 gv を持った．
- 南部・Goldstone 粒子が現れていない．

場の自由度を数えてみると、対称性の破れる前は零質量のベクトル場 (自由度 2) と南部・Goldstone 粒子になるはずの実スカラー - 場 ρ (自由度 1) があつた．ゲ - ジ対称性の自発的な破れの後にはスカラー - 場が姿を消し、代わりにベクトル場が質量を持って (縦波成分が加わり) 自由度 3 になっていた．結局、ゲ - ジ理論においてはゲ - ジ対称性の自発的な破れが起こると破れた対称性に対応するゲ - ジ場は南部・Goldstone 粒子を吸収して質量をもつことになる．これを Higgs 機構 という．

自発的な対称性の破れと Higgs 機構を用いれば対称性が破れた後でも理論はくりこみ可能であることが証明できる．

0.3 Weinberg-Salam 模型

0.3.1 登場する粒子たち

自然界に現れている、いわゆる“素粒子”とよばれるものを分類してみよう．まず、力を伝える場としてのベクトル場 (ゲ - ジ場) があり、現在発見されているもの、あるいは存在すると広く思われているものは、

光子 電磁相互作用を媒介する．質量 0 ．

W, Z 弱い相互作用を媒介する． $M(W) = 80 \text{ GeV}$, $M(Z) = 91 \text{ GeV}$.

グル - オン 量子色力学で強い相互作用を媒介するゲ - ジ場 . 質量 0 . 閉じこめの仮説が正しければ単体では観測されない .

重力子 重力を媒介する粒子 . スピン 2 . 質量 0 .

これに対して , 物質場といわれるものは ,

レプトン 強い相互作用をしない .

$$e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau.$$

ハドロン 強い相互作用をする . クォ - ク模型でよく分類できて , クォ - ク 3 つで表せるものはバリオン , クォ - ク と反クォ - ク で表せるものはメソンとよばれる . それ以外の状態の可能性もあるが (例えば 6 クォ - ク 状態) 確認されていない .

$$p, n, \pi, K, \Lambda, \dots \rightarrow u, d, s, c, b, t.$$

結局 , 力を媒介する場はスピン 1 (重力子は例外) のベクトル場 , 物質場は (クォ - ク 模型を採用して) スピン 1/2 のフェルミオンといえる . 加えて W, Z に質量を与えた Higgs スカラーの存在も期待できる .

さて弱い相互作用のゲ - ジ理論をつくることを考えると 0.1.4 節で述べたようにゲ - ジ変換の群として $SU(2) \times U(1)$ を採用し , 電磁相互作用と統一的に扱う必要があった . この時 , くりこみ可能性を保ったまま , W と Z には質量を持たせて光子は零質量のままにとどめるには自発的な対称性の破れと Higgs 機構を用いねばならない . そこで自発的対称性の破れを引き起こすものとして $SU(2) \times U(1)$ 群の下で非自明な表現をなすスカラー - 場 (Higgs 場) を導入し , 適当なポテンシャルを与えて Higgs 場の電氣的に中性な成分が零でない真空期待値をとるようにさせる (非自明な表現とは群の変換の下で不変でなく実際に変換をうける表現のことである .) 最も単純な非自明表現として弱アイソスピンの二重項を採用する :

$$\text{複素スカラー場} : \phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}.$$

物質場の方は $SU(2) \times U(1)$ 群の下でどのような表現をなすかを考えよう . 弱い相互作用は V - A 型であったことから (0.1.3, 0.1.4 節参照) フェルミオンの左巻き成分を $SU(2)$ の二重項にとる . ニュートリノ以外は質量と電荷の両方を持っているので Dirac 粒子であり , 右巻き成分も存在する . これらの右巻き成分は W と結合しないので $SU(2)$ の下で自明な表現 (一重項) になる . weak hypercharge は電荷と $Q = I_{W3} + Y_W/2$ の関係から決定される .

問題はニュートリノである . 可能性としては次の 3 つがある [11] ;

Dirac 粒子 右巻き成分 ν_R が存在するが , それは弱い相互作用も電磁相互作用もせず , ただ質量項 $m\bar{\nu}_L\nu_R + (\text{h.c.})$ のみを持つ .

Majorana 粒子 粒子と反粒子が同じ ; $(\nu_L)^C = \nu_L$, 質量項 $m\nu_L^T C\nu_L$ を持ち得る . この時レプトン数が保存されない .

Weyl 粒子 質量 0 で左巻き成分または右巻き成分のみが存在する .

ニュートリノ質量はおおよその実験では無視できるほど小さいので , ここでは近似的にニュートリノは Weyl 粒子であるとする . (ニュートリノ振動や $(\beta\beta)_{0\nu}$ 崩壊の議論の際には無視できない .)

以上の議論から得られる , Weinberg-Salam 模型に現れる粒子達とそれらの $SU(2) \times U(1)$ 群の下での表現をまとめたものを表にあらわしておく .

particles	$(SU(2)_L, U(1)_Y)$
left-handed lepton $\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$(2, -1)$
right-handed lepton e_R, μ_R, τ_R	$(1, -2)$
left-handed quark $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$(2, 1/3)$
right-handed quark u_R, c_R, t_R d_R, s_R, b_R	$(1, 4/3)$ $(1, -2/3)$
Higgs scalar $\phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$ $\tilde{\phi} = i\tau^2 \phi^*$	$(2, -1)$ $(2, 1)$
$SU(2)$ gauge boson $(W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ $U(1)$ gauge boson B_μ \Downarrow $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ $Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu$ $A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu$	$(3, 0)$ $(1, 0)$

表 0.1: Weinberg–Salam 模型に登場する粒子達とその表現

0.3.2 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲ - ジ模型

最初は簡単のため，Higgs 場とゲ - ジ場だけで考え，のこりの物質場はあとで導入する．共変微分は， $SU(2)$ の生成子の表現を T^a （例えば二重項に対してはパウリ行列を使って $\sigma^a/2$ となる），weak hypercharge の演算子を Y として次のように与えられる；

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 T^a W_\mu^a - ig_1 (Y/2) B_\mu,$$

ここで g_2 は $SU(2)$ ゲ - ジ相互作用， g_1 は $U(1)$ ゲ - ジ相互作用の結合定数である．Higgs 場 ϕ の weak hypercharge が -1 であることからラグランジアンは次のようになる；

$$\begin{aligned} L = & -(1/4)F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - (1/4)B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + |(\partial_\mu - ig_2(\sigma^a/2)W_\mu^a + i(g_1/2)B_\mu)\phi|^2 \\ & - \kappa^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \\ & \left(\begin{array}{l} F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\ B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{array} \right). \end{aligned}$$

いま Higgs 場のポテンシャル $V = \kappa^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$ は $\kappa^2 < 0$ とすると $\phi^\dagger \phi = -\kappa^2/2\lambda \equiv v^2/2$ で最小値をとり対称性が自発的に破れる．この時 Higgs 場 ϕ が一つだけならば，適当なゲ - ジ変換によって電氣的に中性な成分 ϕ^0 だけが零でない真空期待値を持つようにできて，かつその値を実数にとれる．

(真空期待値の方向に応じて電荷が定義されると思えばよい。) ϕ は $SU(2)$ 二重項の複素スカラ - 場なので実4成分ある。これを

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\sigma^a \xi^a / 2) \begin{pmatrix} v + \eta \\ 0 \end{pmatrix},$$

(ただし ξ^a, η は実スカラ - 場) と表した後, 0.2.3 節の Higgs 機構の説明のところで議論のように $\exp(i\sigma^a \xi^a / 2)$ の部分をゲ - ジ変換に吸収させてしまう (これを unitary gauge をとったとよぶ。) こうして対称性が破れた後のラグランジアンが得られる:

$$\begin{aligned} V &\Rightarrow \kappa^2(v + \eta)^2/2 + \lambda(v + \eta)^4/4 \\ &= 2\lambda v^2\eta^2/2 + \lambda v\eta^3 + \lambda\eta^4/4 + (\text{定数}), \\ &|(\partial_\mu - ig_2(\sigma^a/2)W_\mu^a + i(g_1/2)B_\mu)\phi|^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} 2i\partial_\mu + g_2W_\mu^3 - g_1B_\mu & g_2(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g_2(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & 2i\partial_\mu - g_2W_\mu^3 - g_1B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v + \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= (1/2)\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + (1/2)(\sqrt{g_1^2 + g_2^2}v/2)^2 Z_\mu Z^\mu + (g_2v/2)^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \dots \\ &\quad \left(\begin{array}{l} Z_\mu = (g_2W_\mu^3 - g_1B_\mu)/\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

この結果を見ると, 実4成分あった Higgs スカラ - 場の内1つの中性実スカラ - 場 η だけが生き残り, 代わりにゲ - ジ場 W_μ^\pm, Z_μ が質量を得たことがわかる。各粒子の質量は,

$$M(\eta) = \sqrt{2\lambda}v, \quad M(Z) = (\sqrt{g_1^2 + g_2^2}/2)v, \quad M(W) = (g_2/2)v.$$

もともと4つあったゲ - ジ場 ($W_\mu^{1,2,3}, B_\mu$) から Z と W^\pm の3つが質量を得たが, それらに直交する

$$A_\mu \equiv (g_1W_\mu^3 + g_2B_\mu)/\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

は零質量のまま留まり, これが電磁相互作用 $U(1)_{EM}$ のゲ - ジ場である光子になる。

クォ - ク・レプトンの導入

物質場であるクォ - クとレプトンを導入し, ゲ - ジ場や Higgs 場との相互作用を見てみよう。ゲ - ジ場との相互作用はこの節の最初で与えられた共変微分によって決定される。

* $SU(2)$ 二重項 ($\psi_L = (\psi_{1L}, \psi_{2L})^T$) の場合

$$\begin{aligned} &i\bar{\psi}_L\gamma_\mu D^\mu\psi_L \\ &\Rightarrow i(\bar{\psi}_{1L}, \bar{\psi}_{2L})\gamma^\mu \left[-i\frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - i\frac{g_1}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} B_\mu \right] \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_{1L}, \bar{\psi}_{2L})\gamma^\mu \left[\begin{array}{cc} \frac{(g_2^2 - Yg_1^2)}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_\mu + \frac{g_1g_2(1+Y)}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} A_\mu & \sqrt{2}g_2W_\mu^+ \\ \sqrt{2}g_2W_\mu^- & -\frac{(g_2^2 + Yg_1^2)}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Z_\mu + \frac{g_1g_2(-1+Y)}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} A_\mu \end{array} \right] \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

* 一重項 (Ψ_R) の場合

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}_R\gamma_\mu D^\mu\Psi_R &\Rightarrow (Yg_1/2)\bar{\Psi}_R\gamma^\mu B_\mu\Psi_R \\ &= \frac{Yg_1}{2\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}\bar{\Psi}_R\gamma^\mu (-g_1Z_\mu + g_2A_\mu)\Psi_R. \end{aligned}$$

以上をまとめると

W との結合

$$(g_2/\sqrt{2})W_\mu^+\bar{\psi}_{1L}\gamma^\mu\psi_{2L} + (\text{h.c.}).$$

Z との結合

$$\begin{aligned} & (1/\sqrt{g_1^2 + g_2^2})Z_\mu[\bar{\psi}_L\gamma^\mu\{g_2^2 I_{W3} - (g_1^2/2)Y\}\psi_L - (g_1^2/2)Y\bar{\Psi}_R\gamma^\mu\Psi_R]. \\ = & \sqrt{g_1^2 + g_2^2}Z_\mu[\bar{\psi}_L\gamma^\mu(I_{W3} - \sin^2\theta_W Q)\psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma^\mu(-\sin^2\theta_W Q)\Psi_R]. \\ & (\sin^2\theta_W = g_1^2/(g_1^2 + g_2^2), \quad Q = I_{W3} + (Y/2).) \end{aligned}$$

光子 (A) との結合

$$(g_1g_2/\sqrt{g_1^2 + g_2^2})A_\mu[\bar{\psi}_L\gamma^\mu Q\psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma^\mu Q\Psi_R].$$

これから単位電荷 e が $g_1g_2/\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ で定義される .

次に Higgs 場との結合を見る . 簡単のため第一世代 (e, ν_e, u, d) だけで考える . $SU(2) \times U(1)$ 変換の下で不変かつくりこみ可能な結合は以下とその複素共役だけである ;

$$\begin{aligned} y_e\bar{l}_L e_R \tilde{\phi} &= y_e[\bar{\nu}_L e_R(\phi^-)^* - \bar{e}_L e_R(\phi^0)^*], \\ y_d\bar{q}_L d_R \tilde{\phi} &= y_d[\bar{u}_L d_R(\phi^-)^* + \bar{d}_L d_R(\phi^0)^*], \\ y_u\bar{q}_L u_R \phi &= y_u[\bar{u}_L u_R \phi^0 + \bar{d}_L u_R \phi^-], \end{aligned}$$

ここで先ほどの手続きに従って ϕ^- を消し去り , ϕ^0 を $(v + \eta)/\sqrt{2}$ で置き換えれば対称性が破れた後の結合が得られる .

$$y\bar{\psi}_L\psi_R\phi^0 \rightarrow (y/\sqrt{2})(v + \eta)\bar{\psi}_L\psi_R = m[1 + (\eta/v)]\bar{\psi}_L\psi_R.$$

ここで $m = yv/\sqrt{2}$ であり , これが場 ψ の質量になる . Higgs 場 η と物質場 ψ との結合が m に比例しているので , 実験でこの Higgs スカラ - を発見するには重いフェルミオンの関わる反応で探するのが良いことがわかる .

0.4 Phenomenology of Flavor Dynamics

0.4.1 現象論 à la carte

ここでは前章で説明した Weinberg–Salam 模型に基づいての現象論の例題をいくつか考える [12] .

Weinberg–Salam 模型のパラメ - タ

Weinberg–Salam 模型でのフリ - パラメ - タは ,

ゲ - ジ結合定数 g_2, g_1

$$\Rightarrow e = \frac{g_1g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin^2\theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2}$$

Higgs ポテンシャルより μ^2, λ

$$\Rightarrow (\sqrt{2}G_F)^{-1} = v^2 = -\mu^2/\lambda, \quad m_H^2 = -2\mu^2$$

湯川結合定数 $y_e^{mn}, y_d^{mn}, y_u^{mn}$

これら全てが物理的な量ではなく , クォ - クとレプトンの質量および小林・益川行列要素の内 , 物理的な成分だけが意味を持つ .

3世代の場合ではクォークの質量が6つ、レプトンの質量が3つと物理的な小林・益川行列要素の成分数が回転角3つと複素位相1つで計13個にゲージ結合定数2つとHiggs部から2つで最終的に17個のパラメータが存在する。

これらのパラメータの内、現在の実験でよく決定されているものを見ていこう。まずゲージ相互作用とHiggsポテンシャルに関わる部分では次の3つが精密に測られている。

$$e, G_F, M_Z = (\sqrt{g_1^2 + g_2^2}/2)v.$$

これから g_1, g_2 と v は決定されるがHiggsスカラーの質量だけは実際にHiggs粒子が発見されるまではわからない。

湯川相互作用の部分では、クォーク、レプトンの質量の内、レプトンは精密に測られている。クォークは、特に第一世代の軽いものでは強い相互作用の影響が無視できず不定性が大きい、これもほぼわかっている。小林・益川行列は第一世代と第三世代の間の要素にまだ不定性が大きい、最近のB中間子の実験やCPの破れの実験からとりうる値の範囲が狭められて来ている。これについては後の節で解説する。

R_{hadron}

電子・陽電子衝突型加速器での実験において重要な測定の一つに、終状態がハドロン(クォーク)になる確率と電磁相互作用を通じて正負の μ 粒子対にいく確率との比があり、これを R_{had} とよぶ；

$$R_{\text{had}} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)_{\text{QED}}}.$$

Weinberg-Salam 模型では、 Z が中間状態になる寄与を無視すれば

$$R_{\text{had}}(E) = 3 \sum_q^{(2m(q) \leq E)} Q_q^2.$$

となる。ファクタ3はカラ自由度からきている。またここでは τ の崩壊で見えるハドロン終状態は除いてある。よって R_{had} の値は $E < 2m_c \simeq 3 \text{ GeV}$ では u, d, s クォークの寄与から 2 , $2m_c < E < 2m_b \simeq 10 \text{ GeV}$ では c クォークの寄与が加わって $10/3$, $2m_b < E < 2m_t$ で $11/3$ となり、これは現在の実験での値と (Z や輻射補正の効果を考慮すれば) 合っている。

ρ パラメータ

フェルミオンでつくられるカレントと W, Z との結合をもう一度復習すると；

$$L_{W,Z} = (g_2/\sqrt{2})W_\mu^+ J_-^\mu + (\text{h.c.}) + \sqrt{g_1^2 + g_2^2}Z_\mu J_N^\mu,$$

ただし、ここで

$$\begin{aligned} J_-^\mu &= \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + V_{ud}\bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \dots, \\ J_N^\mu &= J_3^\mu - \sin^2\theta_W J_Q^\mu \\ &= -(1/2)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \sin^2\theta_W\bar{e}\gamma^\mu e + (1/2)\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu \nu_L \\ &\quad + (1/2)\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - (2/3)\sin^2\theta_W\bar{u}\gamma^\mu u \\ &\quad - (1/2)\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + (1/3)\sin^2\theta_W\bar{d}\gamma^\mu d. \end{aligned}$$

これから W, Z の質量よりも低いエネルギー - スケールでの有効ラグランジアンをつくると,

$$\begin{aligned} H_{eff} &= -\frac{i}{2} \left[\frac{g_2^2}{2} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{-M_W^2} \right) 2J_+^\mu J_-^\nu + (g_1^2 + g_2^2) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{-M_Z^2} \right) J_N^\mu J_N^\nu \right] \\ &= 2\sqrt{2}G_F [J_+^\mu J_{-\mu} + \rho J_N^\mu J_{N\nu}], \end{aligned}$$

ここで新しいパラメータが

$$\rho = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W M_Z^2}$$

と定義されている．これは上に与えた H_{eff} からは荷電カレント相互作用と中性カレント相互作用の比として定義することも出来て， W や Z の質量が直接測定される以前はニュートリノ散乱の実験等からその値が決定されていた．最近では LEP, SLC で Z 質量の精密な測定がなされているので， W, Z の質量を使った式での定義が用いられることが多い．いずれにしても Weinberg-Salam 模型では，輻射補正の効果を除いて， $\rho = 1$ である．もし実験で 1 からのずれが確認されれば，それは Weinberg-Salam 模型を越える新しい物理の存在を示唆することになる．

W decay

W は現在のところ陽子・反陽子衝突型加速器で生成されている．LEP がフェイズ II に入ってその衝突中心エネルギーが $2M_W$ を越えているので，現在では電子・陽電子衝突型加速器でも対生成によって W が生み出されている．そこでは W 質量等のより精密な測定が期待されている．

W が生成された後の崩壊を調べてみよう．まず電子と電子ニュートリノへの崩壊を見る．相互作用は

$$L_W = (g_2/\sqrt{2})W_\mu^+ \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + (\text{h.c.})$$

で与えられるので， $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ 崩壊の振幅は次のようになる；

$$T_e = (g_2/\sqrt{2})\epsilon^\mu(P_W)\bar{u}_e(p)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_\nu(q)/2,$$

ここで P_W, p, q はそれぞれ W , 電子と反ニュートリノの四次元運動量で $p + q = P_W$ である． ϵ^μ は W の偏極テンソル， u_e, v_ν は電子と反ニュートリノのスピンルをあらわしている．この振幅から部分崩壊幅を計算する：

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{1}{2M_W} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} (2\pi)^4 \delta^4(p+q-P_W) \frac{1}{3} \sum_{\text{spin}} |T_e|^2 \\ &= \frac{G_F M_W^3}{\sqrt{2} 6\pi} \left(1 - \frac{m_e^2}{M_W^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e^2}{2M_W^2}\right). \end{aligned}$$

(ここで初期状態の W のスピンについては平均をとり，終状態のフェルミオンのスピンについては和をとっていることに注意せよ．) W 質量に対して生成されるフェルミオンの質量を無視する近似の下では最終行の () でくくられた部分がなくなり，

$$\Gamma_e = \Gamma_\mu = \Gamma_\tau$$

となる．同じ近似で W がクォーク対に崩壊する場合の崩壊幅を計算すると

$$\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_i d_j) = 3|V_{ij}|^2 \Gamma_e,$$

3 はカラ - 自由度であり, V_{ij} は小林・益川行列要素である. これから W の全崩壊幅を求めると

$$\begin{aligned}\Gamma_{tot} &= 3\Gamma_e + \sum_{i,j}^{m(i)+m(j)<M(W)} 3|V_{ij}|^2\Gamma_e \\ &= 9\Gamma_e \simeq 2.0 \text{ GeV} \quad (m_t > M_W)\end{aligned}$$

現在の実験値は $2.06 \pm 0.06 \text{ GeV}$ である.

Z decay

Z は陽子・反陽子衝突型あるいは電子・陽電子衝突型加速器によって粒子とその反粒子の対消滅から生成されている. とくに SLC, LEP の電子・陽電子加速器は反応がクリンな上, その衝突エネルギーを Z 質量付近に設定しているため Z 工場ともいえ, LEP-I では 1 日数万個以上の Z を生成できていた. Z とクォーク, レプトンとの相互作用を思い出すと,

$$\begin{aligned}L_Z &= \sqrt{g_1^2 + g_2^2} Z_\mu (J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_Q^\mu) \\ &= (G_F/\sqrt{2})^{1/2} (M_Z/\sqrt{2}) [\bar{e}\gamma^\mu \{-1 + 4\sin^2 \theta_W + \gamma_5\} e + \bar{\nu}_e\gamma^\mu (1 - \gamma_5)\nu \\ &\quad + \bar{d}\gamma^\mu \{-1 + (4/3)\sin^2 \theta_W + \gamma_5\} d + \bar{u}\gamma^\mu \{1 - (8/3)\sin^2 \theta_W - \gamma_5\} u + \dots].\end{aligned}$$

であった. Z とあるフェルミオン ψ との結合が

$$L_{int} = (G_F/\sqrt{2})^{1/2} (M_Z/\sqrt{2}) Z_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu (g_V + g_A\gamma_5)\psi$$

で与えられた場合, Z が $\psi, \bar{\psi}$ 対に崩壊する幅は, ψ の質量を無視する近似で

$$\Gamma(Z \rightarrow \psi + \bar{\psi}) = \frac{G_F M_Z^3}{24\pi\sqrt{2}} (|g_V|^2 + |g_A|^2)$$

と求められる (ψ がクォークの場合はカラ - 自由度の 3 がさらにかかる.) よって Z の全崩壊幅は次のようになる:

$$\Gamma_{tot} = N_\nu \Gamma_\nu + 3\Gamma_e + 3\Gamma_d + 2\Gamma_u.$$

(トップクォーク質量は Z 質量の半分より大きいいためトップ反トップ対への崩壊は許されないため上式にはトップの寄与は入っていない.) Z のニュートリノへの崩壊は, ニュートリノが電荷を持たずかつ弱い相互作用しかしないので測定器にはかからない. ニュートリノを除いた部分 ($\Gamma_{visible}$) は実際に観測される散乱断面積から求められ, 一方 Γ_{tot} は衝突エネルギーを少しずつ変えていった時の断面積の変化のグラフから求めることができる. そうして実験から得られたデータと理論的に計算した Γ_ν を使って, ニュートリノの数が

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{tot} - \Gamma_{visible}}{\Gamma_\nu}$$

で求められる. 最近のデータ (Particle Data 1998) で計算してみよう:

$$\begin{aligned}\Gamma_e &= 83.83 \pm 0.27 \text{ MeV}, \Gamma_{hadron} = 1740.7 \pm 5.9 \text{ MeV}, \Gamma_{tot} = 2490 \pm 7 \text{ MeV}, \\ \Gamma_\nu(\text{theory}) &= 170 \text{ MeV} \quad (M_Z = 91.2 \text{ GeV}, \sin^2 \theta_W = 0.22), \\ N_\nu &= \frac{2490 - 1740 - 83.83 \times 3}{170} = 2.9\end{aligned}$$

この結果を信じると Weinberg-Salam 模型では世代数が 3 ということになる.

演習問題

1.

以下を示せ

(a) $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$,

(b) $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L$,

(c) $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R - \bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L$,

(d) $(\psi_1)^T C\psi_2 = (\psi_2)^T C\psi_1$ ($\psi_{1,2}$ は反可換とせよ),

(e) $\Gamma^\mu = a\gamma^\mu + (b\sigma^{\mu\nu} + c\sigma^{\mu\nu}\gamma_5)k_\nu$ に対して $\text{tr}(\sigma^{\mu\nu}\Gamma^\rho) = 4b(\eta^{\mu\rho}k^\nu - \eta^{\nu\rho}k^\mu) - 4ic\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\sigma$

2.

Free な Dirac 方程式の解で質量を 0 にする極限では chirality と helicity が一致することを示せ .

3.

行列 行列 X の指数関数を $e^X \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ と定義し, $\sigma_{1\sim 3}$ をパウリ行列とするととき,

(a) 実数 θ_1 について $e^{i\theta_1\sigma_1}$ を求めよ .

(b) 同様に $e^{i\theta_2\sigma_2}$, $e^{i\theta_3\sigma_3}$ を求めよ .

(c) $(e^{i\theta_1\sigma_1})(e^{i\theta_2\sigma_2})(e^{i\theta_3\sigma_3})$ を求めよ .

4.

$SU(2)$ doublet $\psi = (\psi_{up}, \psi_{down})^T$ は $SU(2)$ ゲージ変換の下で $\psi \rightarrow e^{i\theta_a\sigma_a/2}\psi$ と変換される . このとき $i\sigma^2\psi^* = (\psi_{down}^*, -\psi_{up}^*)^T$ も同じ変換を受けることを示せ .

5.

Weinberg-Salam 模型において, ゲージ対称性が破れた後で残る物理的な Higgs スカラーとゲージ場との相互作用を求めよ .

6.

Weinberg-Salam 模型において, Z ボソンが電子・陽電子対に崩壊する崩壊巾を求めよ . (電子の質量は無視してよい .)

関連図書

- [1] 素粒子物理全般と弱い相互作用についての教科書をいくつか挙げておく
H.Georgi, *Weak Interaction and Modern Particle Theory*, (Benjamin, 1984).
C.Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, (Benjamin, 1983).
E.Leader and E.Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and the New Physics*, (Cambridge Univ. Press, 1982).
D.Bailin, *Weak Interactions*, (Adam Hilger, 1982 second ed.)
D.C.Cheng and G.K.O'Neil, *Elementary Particle Physics*, (Addison-Wesley, 1979).
原 康夫, 朝倉現代物理学講座「素粒子」(朝倉書店, 1980).
戸塚 洋二, 岩波講座 現代の物理学「素粒子物理学」(岩波書店, 1992).
坂井 典佑, 物理学基礎シリーズ「素粒子物理学」(朝倉書店, 1993).
- [2] T.D.Lee and C.N.Yang, *Phys.Rev.* **104**, 254 (1956).
- [3] C.S.Wu et.al., *Phys.Rev.* **105**, 1413 (1957).
- [4] 日本物理学会誌 **52-9**, 660 (1997).
- [5] J.H.Christenson, J.W.Cronin, V.L.Fitch and R.Turlay, *Phys.Rev.Lett.* **13**, 138 (1964).
- [6] S.Weinberg, *Phys.Rev.Lett.* **19**, 1264 (1967).
A.Salam, *Elementary Particle Theory* ed. by N.Svartholm, (Almqvist and Wiksell, 1968).
- [7] 文献 12 の文献リストを見よ .
- [8] 物理屋向けの群論の教科書を挙げておく
H.Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, (Benjamin, 1982).
R.Slansky, *Phys.Rep.* **79** no.1, 1 (1981).
- [9] R.Utiyama, *Phys.Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [10] ゲ - ジ理論の教科書を挙げておく
T.P.Cheng and L.F.Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, (Oxford Univ.Press, 1984).
C.Itzykson and J.B.Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill,1980).
E.S.Abers and B.W.Lee, *Phys.Rep.* **9** no.1 1, (1973).
S.Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I & II*, (Cambridge, 195).
西島和彦, 「場の理論」(紀伊国屋書店, 1987).
九後汰一郎, 「ゲ - ジ場の量子論 I,II」(培風館, 1989).
ゲ - ジ理論で重要な論文は
新編物理学選集 70「ゲ - ジ場の理論」吉川圭二, 細谷暁夫 編集 (日本物理学会) に集められている .

- [11] ニュ - トリノに関するレビュー - を1つ挙げておく
M.Do, T.Kotani and E.Takasugi, Prog.Theor.Phys.Supplment **83**, (1985).
- [12] ゲ - ジ理論に基づく模型での現象論の主な論文は
物理学論文選集 212 「素粒子の統一理論」小林 誠, 吉村太彦 編集 (日本物理学会)
に収められている . その文献リストもよい参考となる .

第1章 Flavor Dynamics の基礎

1.1 Flavor Mixing

1.1.1 世代のくりかえし

クォーク, レプトンは質量以外は同じ性質を持つ粒子が何故かくりかえし現れている. 最初にこのくりかえしが発見されたのは μ 粒子であり, 電子と共通の性質をもっていたが質量だけは電子の約 200 倍であった. クォーク模型においても, スtrenジ粒子 (K 中間子や Λ 粒子など) は d クォークと同じ性質の s クォークを導入することにより説明できた. 以後, ν_μ や τ , チャーム粒子, ボトム粒子の発見によりますますくりかえしが確認された. 何故このようなことがおこるのは未だに謎のままである. 以下に現在まで発見されているものをまとめる.

レプトン

	ν_e	e	ν_μ	μ	ν_τ	τ
電荷	0	-1	0	-1	0	-1
質量 (MeV)	$< 10^{-5}$	0.51	< 0.17	106	< 18.2	1777

電子と電子ニュートリノは第一世代に属すといいい, 以下 μ, τ とその相棒のニュートリノをそれぞれ第二, 第三世代に割り振る. 実験ではレプトン数は世代ごとに別々に保存している. LEP での Z の崩壊の観測から, Z と結合してかつ質量が Z の質量の半分以下のニュートリノの数は 3 であると決定されたので, Weinberg-Salam 模型の範囲内では世代の数は 3 といえる.

クォーク

	u	d	c	s	t	b
電荷	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3
質量 (GeV)	$(1.5 \sim 5) \times 10^{-3}$	$(3 \sim 9) \times 10^{-3}$	1.1 ~ 1.4	0.06 ~ 0.17	173.8 ± 5.2	4.1 ~ 4.4

質量は強い相互作用の非摂動的な影響を除いたもの (カレント質量) であり, 不確定要素が多い. u と d が第一世代, c と s, t と b が第二, 第三世代をなす.

レプトン, クォークそれぞれで各世代毎に量子数を付与して, 例えば

LF_1 : e, ν_e は +1, その反粒子は -1, others 0

QF_1 : u, d は +1, その反粒子は -1, others 0

⋮

のように定義すると, レプトンでは (ニュートリノ振動に関わる現象を除いて) LF_1, LF_2, LF_3 の全てが保存している. しかしクォークの方は W ボソンの関与する現象においては, バリオン数 $(QF_1 + QF_2 + QF_3)/3$ は保存するが, $QF_{1 \sim 3}$ 個々では保存されない. 例えば strange 粒子や beauty 粒子の崩壊を見てみると,

$$s \rightarrow u + \text{virtual } W^- \text{ (ex. } \Lambda \rightarrow p + \pi^-), \quad (1.1)$$

$$b \rightarrow u + \text{virtual } W^- \text{ (ex. } B^- \rightarrow \pi^0 \mu^- \bar{\nu}_\mu). \quad (1.2)$$

となって世代の異なる粒子間で遷移がおきている. なぜそうなるかを次節で見て行こう.

1.1.2 世代混合

Weinberg と Salam の提唱した，自発的な対称性の破れをともなう $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲ - ジ理論に基づく模型は現在では実験的に非常に成功したものになっており，これに強い相互作用を $SU(3)$ ゲ - ジ理論で記述する量子色力学を加えたものが素粒子の標準模型となっている．第 k 世代目のクォーク，レプトンを次のようにあらわし

$$q_{kL} = \begin{pmatrix} u_{kL} \\ d_{kL} \end{pmatrix}, \quad u_{kR}, \quad d_{kR}, \quad l_{kL} = \begin{pmatrix} \nu_{kL} \\ e_{kL} \end{pmatrix}, \quad e_{kR}, \quad (1.3)$$

Higgs スカラーとして $SU(2)$ 二重項一つを導入して以下のようにあらわす：

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

この時，標準模型に基づいてクォーク，レプトンと W ボソンとの結合を求めると，

$$\mathcal{L}_W = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{kL}^0} \gamma^\mu e_{kL}^0 W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{u_{kL}^0} \gamma^\mu d_{kL}^0 W_\mu^+ + (\text{h.c.}). \quad (1.5)$$

ここで Einstein の記法に従い繰り返し添字については和をとるものとする．ここで現れたクォーク，レプトンは W との相互作用の固有状態にとっており，必ずしも質量固有状態では無いことを場に 0 の添字をつけて示している．

クォーク，レプトンは対称性の破れが起こった後に，Higgs 場との湯川相互作用を通じて質量を得る．

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = y_E^{mn} \overline{l_{mL}^0} e_{nR}^0 \tilde{\phi} + y_D^{mn} \overline{q_{mL}^0} d_{nR}^0 \tilde{\phi} + y_U^{mn} \overline{q_{mL}^0} u_{nR}^0 \phi + (\text{h.c.}) \quad (1.6)$$

$$= y_E^{mn} [(\phi^-)^* \overline{\nu_{mL}^0} e_{nR}^0 - (\phi^0)^* \overline{e_{mL}^0} e_{nR}^0] + y_D^{mn} [(\phi^-)^* \overline{u_{mL}^0} d_{nR}^0 - (\phi^0)^* \overline{d_{mL}^0} d_{nR}^0] \quad (1.7)$$

$$+ y_U^{mn} [(\phi^0) \overline{u_{mL}^0} u_{nR}^0 + (\phi^-) \overline{d_{mL}^0} u_{nR}^0] + (\text{h.c.}),$$

相対論的不変性とゲージ不変性からは世代の異なる場どうしの結合が禁止されないので，これが一般的な湯川相互作用となる． ϕ^0 に真空期待値 $v/\sqrt{2}$ を代入して，クォーク，レプトンの質量行列を得る：

$$(M_E)_{mn} = \frac{v}{\sqrt{2}} y_E^{mn}, \quad (M_D)_{mn} = \frac{v}{\sqrt{2}} y_D^{mn}, \quad (M_U)_{mn} = -\frac{v}{\sqrt{2}} y_U^{mn}. \quad (1.8)$$

世代数を n_F とすると，これらはいずれも $n_F \times n_F$ 複素行列であり，双ユニタリー変換で対角化することでクォーク，レプトンの質量を得る；

$$U_{LX} M_X (U_{RX})^\dagger = \begin{pmatrix} m_{X1} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{Xn_F} \end{pmatrix} \equiv \hat{M}_X \quad (X = E, D, U). \quad (1.9)$$

ここで現れたユニタリー変換により，クォーク，レプトンの質量固有状態は相互作用の固有状態と次の関係で結び付くことになる：

$$e_{Rm} = (U_{RE})_{mn} e_{Rn}^0, \quad e_{Lm} = (U_{LE})_{mn} e_{Ln}^0, \quad (1.10)$$

$$d_{Rm} = (U_{RD})_{mn} d_{Rn}^0, \quad d_{Lm} = (U_{LD})_{mn} d_{Ln}^0, \quad (1.11)$$

$$u_{Rm} = (U_{RU})_{mn} u_{Rn}^0, \quad u_{Lm} = (U_{LU})_{mn} u_{Ln}^0. \quad (1.12)$$

これを式 (1.5) に代入すると

$$\mathcal{L}_W = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{kL}^0} \gamma^\mu (U_{LE}^\dagger)_{kn} e_{nL} W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \overline{u_{kL}^0} \gamma^\mu (U_{LU} U_{LD}^\dagger)_{kn} d_{nL} W_\mu^+ + (\text{h.c.}). \quad (1.13)$$

ニュートリノは質量 0 で縮退しているとみなすなら，世代間でニュートリノをユニタリー変換しても物理には影響しない．よって $\nu_{Lm} = (U_{LE})_{mn}\nu_{Ln}^0$ ととり，ユニタリー行列 $U_{LU}U_{LD}^\dagger$ を V_{KM} と書き直して以下の相互作用ラグランジアンを得る：

$$\mathcal{L}_W = \frac{g_2}{\sqrt{2}}\overline{\nu_{kL}}\gamma^\mu e_{kL}W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}}\overline{u_{kL}}\gamma^\mu(V_{KM})_{kn}d_{nL}W_\mu^+ + (\text{h.c.}). \quad (1.14)$$

これを見るとレプトンでは世代の量子数が保存されるが，クォークでは， V_{KM} が対角行列にならない限り，一般には保存されないことがわかる．

W ボソン以外のゲージボソンとの結合はどうだろうか．クォークとゲージ場との相互作用を与えるラグランジアンは以下で与えられる，

$$\begin{aligned} -i\mathcal{L}_g &= (\overline{u_{kL}^0}, \overline{d_{kL}^0}) \begin{pmatrix} \mathcal{D}_u & \mathcal{D}_+ \\ \mathcal{D}_- & \mathcal{D}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{kL}^0 \\ d_{kL}^0 \end{pmatrix} + \overline{u_{kR}^0}\mathcal{D}_{uR}u_{kR}^0 + \overline{d_{kR}^0}\mathcal{D}_{dR}d_{kR}^0 \\ &+ (\overline{\nu_{kL}^0}, \overline{e_{kL}^0}) \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\nu & \mathcal{D}_{l+} \\ \mathcal{D}_{l-} & \mathcal{D}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{kL}^0 \\ e_{kL}^0 \end{pmatrix} + \overline{e_{kR}^0}\mathcal{D}_{eR}e_{kR}^0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

ここでそれぞれの D は共変微分である．式 (1.10-1.12) に従ってクォーク，レプトンを質量固有状態にもっていくと，共変微分は世代を区別しないので

$$\begin{aligned} -i\mathcal{L}_g &= (\overline{u_{kL}}, \overline{d_{kL}}) \begin{pmatrix} \mathcal{D}_u & \mathcal{D}_+V_{KM} \\ \mathcal{D}_-(V_{KM})^\dagger & \mathcal{D}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{kL} \\ d_{kL} \end{pmatrix} + \overline{u_{kR}}\mathcal{D}_{uR}u_{kR} + \overline{d_{kR}}\mathcal{D}_{dR}d_{kR} \\ &+ (\overline{\nu_{kL}}, \overline{e_{kL}}) \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\nu & \mathcal{D}_{l+} \\ \mathcal{D}_{l-} & \mathcal{D}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{kL} \\ e_{kL} \end{pmatrix} + \overline{e_{kR}}\mathcal{D}_{eR}e_{kR}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

となって世代混合はクォークと W ボソンとの結合のみに現れることがわかる．これはニュートリノを質量 0 としたことで，chirality 左巻き成分を常に $SU(2)$ 二重項に，右巻き成分を一重項にとり，さらに両者の数を一致させたためである．

1.2 Quark mixing matrix

世代混合がおこる， W ボソンとクォークの結合を調べてみよう：

$$\mathcal{L}_W = \frac{g_2}{\sqrt{2}}\overline{u_{mL}}\gamma^\mu(V_{KM})_{mn}d_{nL}W_\mu^+ + (\text{h.c.}). \quad (1.17)$$

ここで現れる世代混合行列 V_{KM} は小林・益川行列とよばれている [1]．小林・益川行列の持つ物理的に意味のある自由度を考えてみよう．世代数を N とすると V_{KM} は $N \times N$ のユニタリー行列であるので，その自由度は N^2 個ある．このうち $(2N - 1)$ 個はクォークの位相の自由度で吸収できる（全クォークを同じ位相だけ変化させる分は行列を変化させないので 1 引かれている．）こうして小林・益川行列の物理的自由度の数は

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2 \quad (1.18)$$

で与えられる．このうち世代間の回転の自由度が $N(N - 1)/2$ あるので

$$(N - 1)^2 - \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2} \quad (1.19)$$

だけが小林・益川行列の複素位相になる．理論中の結合定数が場の位相の自由度によって吸収できない複素位相を持つとその理論では CP 対称性が破れるので（後の章を参照されたい），クォークが 3 世代以上あると CP の破れの存在が説明できる．これが小林と益川の発見である．では，具体的に $(N - 1)^2$

個のパラメータで小林・益川行列を書き表す方法の一つを紹介しよう．まず i 世代目と j 世代目だけを変換するユニタリ - 行列を導入する；

$$R^{(ij)} \equiv \begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \exp(i\phi_{ii}) \cos \theta_{ij} & \cdots & \exp(i\phi_{ij}) \sin \theta_{ij} & \cdots & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & -\exp(i\phi_{ji}) \sin \theta_{ij} & \cdots & \exp(i\phi_{jj}) \cos \theta_{ij} & \cdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

ここで $R^{(ij)}$ のユニタリ - 性より

$$\phi_{ii} - \phi_{ij} = \phi_{ji} - \phi_{jj} \quad (1.21)$$

であり，行列中のあらわにかかれていない成分は対角成分が 1，それ以外は 0 である．次に小林・益川行列 V_{KM} を独立な $R^{(ij)}$ の積で表す；

$$\begin{aligned} V_{KM} &= \prod_{i < j} R^{(ij)} \\ &\equiv R_1 R_2 \cdots R_{N(N-1)/2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

さらにクォークの位相変換による V_{KM} の変化を見ると，

$$\begin{aligned} V_{KM} &\rightarrow P_u V_{KM} P_d^\dagger \\ &= P_u R_1 P_1^\dagger P_1 R_2 P_2^\dagger \cdots P_{N(N-1)/2-1} R_{N(N-1)/2} P_d^\dagger. \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

ただしここで対角的な phase matrix

$$P_x = \begin{pmatrix} \exp(ix_1) & & & \\ & \exp(ix_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(ix_N) \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

を導入した．この位相変換による $R^{(ij)}$ の変化を見ると

$$P_a R^{(ij)} P_b^\dagger =$$

$$\begin{pmatrix} \exp[i(a_1 - b_1)] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \exp[i(\phi_{ii} + a_i - b_i)] \cos \theta_{ij} & \cdots & \exp[i(\phi_{ij} + a_i - b_j)] \sin \theta_{ij} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -\exp[i(\phi_{ji} + a_j - b_i)] \sin \theta_{ij} & \cdots & \exp[i(\phi_{jj} + a_j - b_j)] \cos \theta_{ij} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

上式から a_i を適当に選べば対角成分をすべて実に行うことができる．よって phase matrix $P_u, P_1, \dots, P_{N(N-1)/2-1}$ で R_1 から $R_{N(N-1)/2}$ の対角成分をすべて実にする．さらに P_d の自由度 $(N-1)$ 個分だけ非対角成分も実にとれる．こうして変換された $R^{(ij)}$ を掛け合わせて得られた V_{KM} のパラメータの数は， θ_{ij} が $N(N-1)/2$ 個，吸収されずに残る複素位相が $N(N-1)/2 - (N-1)$ 個で合わせてちょうど $(N-1)^2$ 個になっている．

3世代の場合の小林・益川行列の parametrization の具体例を3つ挙げておく．これらはいずれも文献でよく用いられるものである．

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i,$$

original Kobayashi – Maskawa[1]

$$= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta'} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta'} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta'} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta'} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta'} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

$$c_{ij} = \cos \phi_{ij} \quad \text{and so on.} \quad 0 \leq \phi_{ij} \leq \pi/2$$

Particle Data[2]

$$= \begin{pmatrix} 1 - (\lambda^2/2) & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - (\lambda^2/2) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

$$+ \begin{pmatrix} -(\lambda^4/8) + O(\lambda^6) & O(\lambda^7) & 0 \\ (1/2 - \rho - i\eta)A^2\lambda^5 + O(\lambda^7) & -(1/8 + A^2/2)\lambda^4 + O(\lambda^6) & O(\lambda^8) \\ (\rho + i\eta)A\lambda^5/2 + O(\lambda^7) & (1/2 - \rho - i\eta)A\lambda^4 + O(\lambda^6) & -A^2\lambda^4/2 + O(\lambda^6) \end{pmatrix}$$

$$\lambda = s_{12}, \quad A\lambda^2 = s_{23}, \quad A\lambda^3(\rho - i\eta) = s_{13}e^{-i\delta'}$$

Wolfenstein[3]

二番目のものは先ほど紹介した方法によるものであり，最後のものは行列の各成分を $\lambda = s_{12}$ で展開したもので， $O(\lambda^3)$ の項までが近似としてよく用いられる．近似ではあるがその構造の簡単さと小林・益川行列の階層性をよくあらわしているため実際の応用にはたいへん便利である．

小林・益川行列要素で作られる量のうち物理に密接に関わるものは

1. 各成分の絶対値: $|V_{ij}|$,
2. Jarlskog determinant:

$$\begin{aligned} J &\equiv \text{Im}(V_{ud}V_{us}^*V_{cs}V_{cd}^*) = -\text{Im}(V_{td}V_{ts}^*V_{cs}V_{cd}^*) = -\text{Im}(V_{ud}V_{us}^*V_{ts}V_{td}^*) \\ &= -\text{Im}(V_{ud}V_{ub}^*V_{cb}V_{cd}^*) = \text{Im}(V_{ud}V_{ub}^*V_{tb}V_{td}^*) = \text{Im}(V_{td}V_{tb}^*V_{cb}V_{cd}^*). \end{aligned} \quad (1.30)$$

両者はいずれもクォークの位相変換に対して不変な物理量である．前者はハドロン反応，とくに崩壊に直接かかわってくる．その決定法の詳細については Particle Data の小林・益川行列の解説のところに参考文献とともに紹介されているのでそれを参照されたい．2番目の Jarlskog determinant は CP の破れに結びついた量である [4]．Particle Data や Wolfenstein の parametrization では

$$J = c_{12}c_{23}c_{13}^2s_{12}s_{23}s_{13} \sin \delta' = A^2\lambda^6\eta + O(\lambda^8) \quad (1.31)$$

と表される．この式からわかるように CP の破れを与える複素位相 δ' が 0 ならば J も 0 となり，たまたもしも電荷が等しいクォークの質量に縮退があるとそこで s_{ij} が 0 にとれ複素位相も吸収されてしまうので CP の破れは起こらず $J = 0$ となる．

この節の最後に Unitarity Triangle について紹介しよう．小林・益川行列のユニタリ性より次式を得る；

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (1.32)$$

この式に現れる各小林・益川行列要素は中性 B 中間子の物理に大きく関わるものである．3つの項のそれぞれを複素平面上にベクトルとして描くと，和が 0 であることから図 1.1 左のように三角形をなす．Wolfenstein の parametrization を用いて $O(\lambda^3)$ までで，それぞれを求めると，

$$V_{ud}V_{ub}^* = A\lambda^3(\rho + i\eta), \quad (1.35)$$

$$V_{cd}V_{cb}^* = -A\lambda^3, \quad (1.36)$$

$$V_{td}V_{tb}^* = A\lambda^3(1 - \rho - i\eta). \quad (1.37)$$

これから三角形の面積を求めると

$$\text{area} = \eta A^2 \lambda^6 / 2 = |J|/2, \quad (1.38)$$

となり， CP の破れの measure になっている．またこの三角形のそれぞれの角は B 中間子の non-leptonic 崩壊における CP asymmetry を与える [5]．K 中間子の物理に関わる Unitarity Triangle は

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0. \quad (1.39)$$

で与えられ， $O(\lambda^5)$ までで各項を求めると

$$V_{ud}V_{us}^* = \lambda\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) - \frac{\lambda^5}{8}, \quad (1.40)$$

$$V_{cd}V_{cs}^* = -\lambda\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{A^2}{2}\right)\lambda^5 + \left(\frac{1}{2} - \rho - i\eta\right)A^2\lambda^5, \quad (1.41)$$

$$V_{td}V_{ts}^* = -A^2\lambda^5(1 - \rho - i\eta), \quad (1.42)$$

となって第三項目が一項目と二項目に比べて非常に小さいことから，三角形は図 1.1 右のようにひしゃげた (squashed といわれる) 形をしている．そのため CP asymmetry は K 中間子よりも B 中間子のほうが大きいとされている．

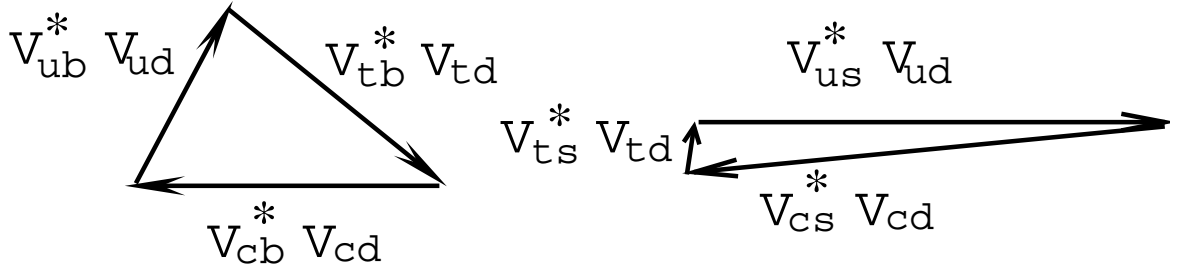


図 1.1: unitarity triangle

1.3 NFC and the extensions of the standard model

ここで再び世代混合に話題をもどそう．一般に中性粒子とクォークとの結合で quark flavor の変化するものを Flavor Changing Neutral Current (FCNC) とよぶ (クォークの結合が $\bar{q}_i \gamma_\mu q_j$ と四元ベクトル型にはなっていないなくてもカレントとよばれる)．標準模型の場合は前々節で見たように FCNC は weak の一次のオーダー ($O(G_F)$) では存在しない．この FCNC が存在すると，その結合定数が非常に小さいか，もしくは FCNC を媒介する中性粒子の質量が非常に重くないと $K^0 - \bar{K}^0$ 混合などの実験結果と矛盾してしまう．例えば図 1.2 のような寄与があると，次のような $K^0 - \bar{K}^0$ 混合の effective Hamiltonian が得られる．

$$\mathcal{H}_{K-\bar{K}} \sim \frac{g^2}{M_\phi^2} (\bar{3}\Gamma d)^2 + (\text{h.c.}) . \quad (1.43)$$

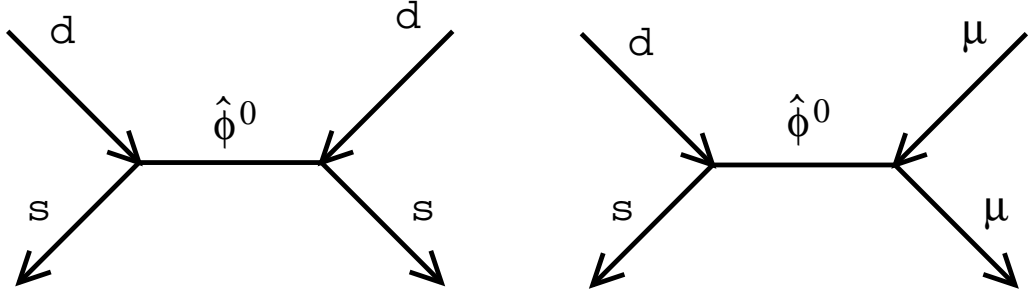


図 1.2: FCNC contribution to $K^0 - \bar{K}^0$ mixing

ここで g はクォークと場 ϕ の結合定数で、簡単のため実とする。 M_ϕ は場 ϕ の質量であり、 Γ は $\{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5\}$ の適当な組合せである。これから得られる中性 K 中間子の二つの質量固有状態間の質量差は

$$\Delta M_K \sim 2 \frac{g^2}{M_\phi^2} f_K^2 M_K, \quad (1.44)$$

f_K, M_K は K 中間子の崩壊定数と質量であり、それぞれ約 160 MeV, 500 MeV である。実験値は $\Delta M_K = 3.5 \times 10^{-15}$ GeV であるので、これから式 (1.44) の値が実験値を越えないために以下の制限を得る：

$$\frac{g^2}{M_\phi^2} < 10^{-13} \text{ (GeV}^{-2}\text{)}. \quad (1.45)$$

よって FCNC には非常に厳しい制限がつけられるので、模型の建設の際には FCNC を抑制する必要がある。これが

- ゲ - ジ群の下での粒子の表現のとりかた
- ある global symmetry

など、模型中のパラメ - タの値によらない方法によって達成され輻射補正の影響によって効果が損なわれることのない場合を Natural Flavor Conservation (NFC) とよぶ [6]。逆にパラメ - タの fine tuning による場合は、一般に輻射補正の影響があるので補正の各 order 毎に fine tuning し直さなければならぬので natural ではない。(この場合は Neutral Flavor Conservation とよばれることがある。)

Natural Flavor Conservation を達成するための条件を具体的に見て行こう。まずゲージボソンとの結合を考える。クォ - クで電荷と chirality が同じものどうしをまとめて次のように書く；

$$U_L^0 \equiv \begin{pmatrix} u^0 \\ c^0 \\ t^0 \\ \vdots \end{pmatrix}_L, \quad U_R^0 \equiv \begin{pmatrix} u^0 \\ c^0 \\ t^0 \\ \vdots \end{pmatrix}_R, \quad D_L^0 \equiv \begin{pmatrix} d^0 \\ s^0 \\ b^0 \\ \vdots \end{pmatrix}_L, \quad D_R^0 \equiv \begin{pmatrix} d^0 \\ s^0 \\ b^0 \\ \vdots \end{pmatrix}_R. \quad (1.46)$$

Neutral current と質量に関わる部分の Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC,m} = & i\bar{U}_L^0 \not{D}_1 U_L + i\bar{U}_R^0 \not{D}_2 U_R + i\bar{D}_L^0 \not{D}_3 D_L + i\bar{D}_R^0 \not{D}_4 D_R \\ & - [\bar{U}_R^0 M_U U_L^0 + \bar{D}_R^0 M_D D_L^0 + (\text{h.c.})]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

クォ - クを質量の固有状態へ持っていこう、

$$M_U = (V_{RU})^\dagger \hat{M}_U V_{LU}, \quad M_D = (V_{RD})^\dagger \hat{M}_D V_{LD}, \quad (1.48)$$

と質量行列を対角化し，クォ - クの質量固有状態を次のように定義する；

$$V_{LU}U_L^0 \equiv U_L, \quad V_{RU}U_R^0 \equiv U_R, \quad V_{LD}D_L^0 \equiv D_L, \quad V_{RD}D_R^0 \equiv D_R. \quad (1.49)$$

これで Lagrangian を書き換えると，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC,m} = & i\overline{U}_L(V_{LU}\not{D}_1V_{LU}^\dagger)U_L + i\overline{U}_R(V_{RU}\not{D}_2V_{RU}^\dagger)U_R \\ & + i\overline{D}_L(V_{LD}\not{D}_3V_{LD}^\dagger)D_L + i\overline{D}_R(V_{RD}\not{D}_4V_{RD}^\dagger)D_R \\ & - [\overline{U}_R\hat{M}_U U_L + \overline{D}_R\hat{M}_D D_L + (\text{h.c.})]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

これから，パラメ - タ M_U, M_D （あるいは $V_{LU} \sim V_{RD}$ ）の如何によらず FCNC が生じないためには $\not{D}_{1\sim 4}$ 全てが単位行列に比例していることが必要かつ十分な条件となる．よってゲージボソンとの結合で NFC が成立するための条件として次を得る，

「電荷と chirality の等しいクォ - クどうしは全てゲ - ジ群のもとで同じ量子数をもつこと。」

FCNC を抑制するための条件を次はスカラー - との結合の場合で見て行こう．先ほどと同じ記号を用いて，中性スカラーとクォ - クの結合は一般的に以下のように与えられる．

$$-\mathcal{L}_{NH} = \overline{U}_R^0 y_U^i U_L^0 (\phi_i^0)^* + \overline{D}_R^0 y_D^i D_L^0 \phi_i^0 + (\text{h.c.}). \quad (1.51)$$

ここで ϕ_i^0 は中性スカラーで，これが期待値 v_i をとるとして

$$\phi_i^0 \equiv v_i + \tilde{\phi}_i^0, \quad y_U^i v_i^* = M_U, \quad y_D^i v_i = M_D \quad (1.52)$$

と定義し，クォ - クを質量固有状態へもっていくと次式を得る．

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{NH} = & \overline{U}_R(V_{RU}y_U^i V_{LU}^\dagger)U_L(\tilde{\phi}_i^0)^* + \overline{D}_R(V_{RD}y_D^i V_{LD}^\dagger)D_L\tilde{\phi}_i^0 \\ & + \overline{U}_R\hat{M}_U U_L + \overline{D}_R\hat{M}_D D_L + (\text{h.c.}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$(1.54)$$

これから，中性スカラーとクォ - クの結合が flavor を保存するには $V_{RU}y_U^i V_{LU}^\dagger$ と $V_{RD}y_D^i V_{LD}^\dagger$ が任意の i に対して常に対角的であることが必要となる．これを湯川結合定数 $y_{U,D}^i$ を適当に選ぶことによって達成しても，それは輻射補正に対しては一般に安定ではないので Natural Flavor Conservation とはいえない．湯川結合の細かい値によらず NFC を達成する条件は次のようになる，

「適当な対称性によって，u-type, d-type の各クォ - クセクタ - にそれぞれ一つずつのスカラー - だけが結合していること。」

このように NFC の要請は模型に対して強い制限を与える．その好例として，自発的に CP を破る模型について見てみよう．これは模型中の結合定数が全て実数で，対称性の破れに際して Higgs スカラー - の真空期待値が複素位相をとることによって CP の破れを実現する模型である．真空期待値が複素位相を持つためには 2 個以上の Higgs $SU(2)$ 二重項 が必要で Higgs ポテンシャル中に

$$a\phi_1^\dagger\phi_2\phi_1^\dagger\phi_1 + b\phi_1^\dagger\phi_2\phi_2^\dagger\phi_2 + \dots \quad (1.55)$$

という項が存在しなければならない．2 個の Higgs 二重項で自発的な CP の破れを実現する模型は T.D.Lee[7] によって与えられたが，この模型では自発的な CP の破れをおこすための条件が前に述べたクォ - クと Higgs の結合を制限するための対称性と相入れず，NFC が達成されない．Weinberg はさらにもう一つ Higgs doublet を加えることによって自発的な CP の破れと NFC を同時に達成する模型を作り上げた [8]．ただし，その模型では小林・益川行列が実になってしまい， CP の破れはクォ - クと Higgs との結合によってのみもたらされている [9]．

演習問題

1. ν_e と ν_μ が異なる粒子であることを示すにはどのような実験をすればよいかを考えよ .
2. 式 (1.15) における共変微分 D_u, D_d, D_+, D_- の具体的な形を求めよ .
3. 式 (1.32) における等号を証明せよ .
4. 三世代の場合に可能な unitarity triangle を全て求めよ .
5. 標準模型の場合で , 中性 K 中間子が $\mu^- \mu^+$ に崩壊するファインマン図を $O(G_F^2)$ (W または Z が高々二つまで現れる) で求めよ .
6. 第 4 世代目のクォークとして , 以下のフェルミオンを導入した場合

$$D_L : (3, 1, -2/3), \quad D_R : (3, 1, -2/3) \quad \text{under } SU(3) \times SU(2) \times U(1),$$

これらの場と Z ボソンとの結合を求めよ .

関連図書

- [1] M.Kobayashi and T.Maskawa, Prog.Theor.Phys. **49**, 652 (1973).
- [2] C.Caso et.al. (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998). Particle Data Group, Phys.Lett. **204B**, 1 (1988).
- [3] L.Wolfenstein, Phys.Rev.Lett. **51**, 1945 (1983).
- [4] C.Jarlskog, Phys.Rev.Lett. **55**, 1039, (1985); Zeit. fur Phys. **C29**, 491, (1985).
- [5] See, for example, I.I.Bigi, V.A.Khoze, N.G.Uraltsev and A.I.Sanda, in *CP Violation* (ed. C.Jarlskog, World Scientific, 1989), 175.
- [6] S.L.Glashow and S.Weinberg, Phys.Rev. **D15**, 1958 (1977).
- [7] T.D.Lee, Phys.Rev. **D8**, 1226 (1973).
- [8] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **37**, 657 (1976).
- [9] G.C.Branco, Phys.Rev.Lett. **44**, 504 (1980).

第2章 CP violation の基礎

2.1 Chirality

C, P, CP 変換の理論的取り扱いについて見ていく．まず最初に予備知識としてフェルミオンの chirality について説明する．proper Lorentz 変換ではフェルミオンは以下のように変換される：

$$\psi \rightarrow \exp[i\theta^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}/2]\psi, \quad (\sigma_{\mu\nu} \equiv i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2). \quad (2.1)$$

ここで γ_5 の固有値として chirality を定義する． $\gamma_5^2 = 1$ なので chirality は ± 1 をとる．chirality の固有状態は任意のフェルミオンから chiral projection によってつくることができる．

$$\psi_R = P_R\psi \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_L = P_L\psi \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi. \quad (2.2)$$

ψ_R (ψ_L) が chirality +1 (-1) の固有状態となる．Lorentz 変換の生成子 $\sigma_{\mu\nu}$ と γ_5 は可換なので chirality は proper Lorentz 変換によって変化しない．しかし Dirac 方程式の Hamiltonian,

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}^i p^i + m\gamma^0,$$

と γ_5 は可換ではないので保存量ではない．質量 0 の場合は可換となるので chirality も保存量となり，chirality と helicity (スピンと空間運動量の内積の符号．Lorentz 変換で変化するが，Hamiltonian とは可換で保存量である．) は一致する．helicity + の粒子は進行方向に対してスピンの向きが右まわりなので，質量 0 の極限を考えて chirality + のものを「右巻き」，- のものを「左巻き」という．しかし質量が non-zero の場合は両者は異なるのでこれを混同してはいけない．chirality が + だからといってスピンの向きが進行方向右巻きであるとは限らない．

chirality の違いを明確に表示するために γ 行列の chiral 表示を用いる：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

この時フェルミオン場のスピノル成分は以下ようになる：

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_R = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Lorentz 変換の生成子 $\sigma_{\mu\nu}$ が次のように表示されるので chirality が (proper) Lorentz 不変であることが明白になる：

$$\sigma^{0k} = i \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

4 つのスピノル成分すべてが独立な場合を Dirac フェルミオンといい， ψ_L または ψ_R の成分しかもたないフェルミオンを Weyl フェルミオンという．質量 0 のフェルミオンは Weyl フェルミオンになる．標準模型では Higgs 場が真空期待値をもつまではすべてのクォーク・レプトンは質量 0 の Weyl フェルミオンであり， ψ_R と ψ_L は $SU(2) \times U(1)$ の下で異なる変換性を持つ別のフェルミオンである． $m\overline{\psi_L}\psi_R + (\text{h.c.})$ 型の質量項の生成によって二つの Weyl フェルミオンが結合して一つの Dirac フェルミオンとなる．標準模型ではニュートリノには相棒となる ν_R が存在しないので質量 0 となり Weyl フェ

ルミオンである。(後で述べる荷電共役変換に対して不変なフェルミオンで質量をもつものを考えることができ、これは Majorana フェルミオンとよばれる。定義より Majorana フェルミオンは中性でなければならない。Dirac フェルミオンは二つの縮退した Majorana フェルミオンから成るととらえることもできる。Majorana フェルミオンの存在はニュートリノ物理を考える際に重要となる。)

2.2 Parity (P)

座標の空間成分の反転 (パリティ) を考える: $x = (t, \mathbf{x}) \rightarrow x_P = (t, -\mathbf{x})$. フェルミオン場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.6)$$

空間反転によるフェルミオン場の変換を以下で定義する:

$$\psi(x) \rightarrow \psi_P(x_P) = U_P\psi(x). \quad (2.7)$$

ラグランジアンの運動項が空間反転不変であることを要請すると

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi &= i\bar{\psi}_P\gamma^\mu\frac{\partial\psi_P}{\partial x_P^\mu} \\ &= i\bar{\psi}\gamma^0U_P^\dagger\gamma^0\gamma^\mu U_P\partial^\mu\psi \end{aligned} \quad (2.8)$$

これから $\gamma^0U_P^\dagger\gamma^0\gamma^\mu U_P = \gamma_\mu$ という条件が得られ、

$$U_P = \eta_P\gamma^0 \quad (2.9)$$

となる。ここで η_P は絶対値 1 の位相因子である。

空間反転をフェルミオンの成分で見ると、

$$\eta_P\gamma^0\psi = \eta_P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta_P \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

η, ξ が入れ替わる。1 つの Weyl フェルミオン場だけでは片方の成分しかないので入れ替わるべき相手がないので空間反転対称性は成立しない。実際に Weyl 場のラグランジアンの運動項を変換すると

$$i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = (i/2)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(1-\gamma_5)\psi \rightarrow (i/2)\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu(1+\gamma_5)\psi \quad (2.11)$$

となって不変ではない。空間反転のパートナーが存在してこそパリティ不変でありうる。標準模型ではニュートリノの右巻き成分が存在しないことと相互作用が右巻き成分と左巻き成分に非対称に働くことからパリティ不変性が破れている。

2.3 Charge conjugation (C)

次に charge の反転 (荷電共役変換) を考えよう。ここで charge とよぶのは普通の電荷だけでなくバリオン数、レプトン数、ストレンジネスその他も含む、より一般的な量子数と考える。一般に charge は (少なくとも近似的に) 保存量として扱われる。(さもないと charge を考える意味が無い。) Noether の定理により保存量と対称性の間に関係があり、数学的には charge は対応する変換のなす群の Cartan sub-algebra (同時に対角化できる生成子でつくられる最大の組のなす代数) の固有値として定義できる。アイソスピンを例にすると $I_{1\sim 3}$ の内 I_3 を対角的にとれば、その固有値が charge の一種となる。

場 ϕ_k を考え、それが charge q_k を持つとする。これは考えている系において

$$\phi_k \rightarrow e^{iq_k\theta}\phi \quad (2.12)$$

なる変換の下での対称性が存在することに対応する。(θ は全ての場に共通な回転角 .) charge の反転では $q_k \rightarrow -q_k$ であるから , charge を反転させた場は $e^{-iq_k\theta}$ の変換を受けることになる . 素直に考えると , そのように変換する場は (位相因子) $\times \phi_k^*$ である . しかし charge の反転は時空とは無関係に行われるので , Lorentz 変換の元では反転させた場も元の場と同じ変換性を示すべきである . ボソンについては Lorentz 変換の行列が real にとれるので (位相因子) $\times \phi^*$ を charge 反転させた場としてとることに問題はない . しかしフェルミオンの場合は話が違ってくる . フェルミオン場 ψ とその複素共役 ψ^* の Lorentz 変換は以下で与えられる :

$$\psi \rightarrow \exp[i\theta^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}/2]\psi, \quad \psi^* \rightarrow \exp[-i\theta^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^*/2]\psi^*. \quad (2.13)$$

ψ^* に何らかのユニタリー変換を施して ψ と同じ Lorentz 変換性を示す場をつくってみよう . $\psi^C \equiv X\psi^*$ とおけば

$$\psi^C \rightarrow X \exp[-i\theta^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^*/2]\psi^* = \exp[i\theta^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}/2]X\psi^* \quad (2.14)$$

が成立するためには

$$-X\sigma_{\mu\nu}^*X^\dagger = \sigma_{\mu\nu} \quad \text{or} \quad X\gamma^{\mu*}X^\dagger = \pm\gamma^\mu \quad (2.15)$$

が条件となる . \pm の符号は $-$ をとる . なぜならばフェルミオン場のラグランジ안의質量項 $m\bar{\psi}\psi$ を考えると ,

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}\psi &\rightarrow m(X\psi^*)^\dagger\gamma^0 X\psi^* = m\psi^T X^\dagger\gamma^0 X\psi^* \\ &= m\psi^T(\pm\gamma^0)\psi^* = \mp m\bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (2.16)$$

(フェルミオン場は反可換であることに注意 .) となり , charge の反転で質量の符号が反転しては困るからである . $X\gamma^{\mu*}X^{-1} = -\gamma^\mu$ とすると $X\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu X$. γ 行列の chiral 表示 (2.3) で考えると X は $\gamma^{0,1,3}$ と反可換 , γ^2 と可換になる必要がある . $X = (\text{位相因子}) \times \gamma^2$ にとればよい . 位相因子は普通 i にとって (X がユニタリーかつエルミートになる)

$$\psi^C = i\gamma^2\psi^* = i\gamma^2\gamma^0(\bar{\psi})^T \equiv C(\bar{\psi})^T \quad (2.17)$$

と定義した ψ^C を用いてフェルミオン場の荷電共役変換を

$$\psi \rightarrow \eta_C\psi^C \quad (2.18)$$

とする . ここで η_C は場毎に異ってよい位相因子である . この変換をフェルミオンの成分で見ると

$$\eta_C\psi^C = \eta_C i\gamma^2\psi^* = \eta_C i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{pmatrix} = \eta_C \begin{pmatrix} -i\sigma^2\eta^* \\ i\sigma^2\xi^* \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

となって η, ξ が入れ替わっている . 荷電共役変換も 1 つの Weyl 場だけでは対称性が成立せず , 対称であるにはパートナーとなるべき場が必要となる . 実際 1 つの Weyl 場だけのラグランジアンに荷電共役変換をほどこすと式 (2.11) と同じ変換をして不変になっていない . 標準模型は荷電共役変換についてもニュートリノの右巻き成分が存在しないことと相互作用が右巻き成分と左巻き成分に非対称に働くことから対称性が破れている .

荷電共役変換の下で不変なフェルミオンが存在可能である . 式 (2.19) を用いて不変となる条件を求めると ,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \psi_M = \eta_C(\psi_M)^C = \eta_C \begin{pmatrix} -i\sigma^2\eta^* \\ i\sigma^2\xi^* \end{pmatrix} \implies \psi_M = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta_C(i\sigma_2)\xi^* \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

このようなフェルミオンを Majorana フェルミオンとよぶ . Majorana フェルミオンでは 電荷やレプトン数といった量子数が 0 でないと , その量子数は保存されない .

ゲージ場の荷電共役変換をみてみよう．ゲージ場とフェルミオン場とのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - (1/2)\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \quad (2.21)$$

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (2.22)$$

g はゲージ結合定数, T^a はゲージ群の生成子である．このラグランジアンに荷電共役変換をほどこす：

$$\mathcal{L} \rightarrow i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma^\mu(A^C)_\mu^T\psi - m\bar{\psi}\psi - (1/2)\text{Tr}(F^{C\mu\nu}F_{\mu\nu}^C). \quad (2.23)$$

ラグランジアンが荷電共役不変であるには

$$(A^C)_\mu = -A_\mu^T \quad (2.24)$$

であればよい．ただしこの時の生成子 T^a としては Cartan sub-algebra が対角的になっている表現を用いなければならない．なぜそうする必要があるかを例を挙げて示してみよう． $SU(2)$ ゲージ理論で3次元表現のフェルミオンを導入し，生成子として

$$(T^a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (2.25)$$

の表現をとったとする．この時，式 (2.24) をそのまま用いると

$$(A^C)_\mu = -A_\mu^T = -A_\mu^a (T^a)^T = A_\mu^a (T^a). \quad (2.26)$$

すなわち $(A_\mu^a)^C = A_\mu^a$ ．ところが2次元表現のフェルミオンの場合は， $T^a = \sigma^a/2$ なので

$$(A_\mu^a)^C = \begin{cases} -A_\mu^a & (a = 1, 3) \\ A_\mu^a & (a = 2) \end{cases} \quad (2.27)$$

となって矛盾が生じる．もともと $\psi \rightarrow \psi^*$ とすることで charge の反転を行ったのだから，場は charge の固有状態でなければならないのに，上の3次元表現の例ではフェルミオンが固有状態になっていなかった(どの生成子も対角的でない)．にもかかわらず式 (2.24) をそのまま適用したことが矛盾の原因である．

2.4 CP transformation

C と P を同時にほどこす CP 変換を考えてみる．これは1つの Weyl 場に対しても運動項は以下のように不変になっている：

$$i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu(1-\gamma_5)\psi \xrightarrow{C} \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(1+\gamma_5)\psi \xrightarrow{P} \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu(1-\gamma_5)\psi. \quad (2.28)$$

ゲージ相互作用はどうであろうか，

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}_i\gamma^\mu(W_\mu)_{ij}(1-\gamma_5)\psi_j \xrightarrow{CP} -\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}_j\gamma^\mu(-W_\mu)_{ji}(1-\gamma_5)\psi_i \quad (2.29)$$

となって不変である．よって CP 変換まで考えれば Weyl 場だけの理論もゲージ相互作用まで含めて対称性が成立する．

ここでフェルミオン bi-linear の P, C, CP の下での変換を以下にまとめておく．(簡単のため位相因子はすべて1としてある．)：

bi-linear		P	C	CP
S :	$\bar{\psi}_1\psi_2$	$\rightarrow \bar{\psi}_1\psi_2$	$\bar{\psi}_2\psi_1$	$\bar{\psi}_2\psi_1$
V :	$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$	$\rightarrow \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1$
T :	$\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$	$\rightarrow \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2$	$-\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\sigma_{\mu\nu}\psi_1$
A :	$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2$	$\rightarrow -\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2$	$\bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_1$
P :	$\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2$	$\rightarrow -\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2$	$\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1$	$-\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_1$

CP 対称性も破れることはあるだろうか？これまで見てきたようにラグランジアンの中の自由場の部分とゲージ相互作用部分は CP 不変である．他の形の相互作用を調べて見よう．スピン 0 ~ 1 までの場でつくられるくりこみ可能な他の相互作用は

$$\begin{aligned} \text{湯川相互作用} & : \mathcal{L}_{yukawa} = f_{ab}^k \bar{\psi}_a \psi_b \phi^k + (h.c.) , \\ \text{スカラー場自己相互作用} & : \mathcal{L}_{Higgs} = \kappa_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \lambda_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l + (h.c.) . \end{aligned}$$

フェルミオン場とスカラー場の CP 変換を，場ごとに自由にとれる位相を含めて以下で定義する：

$$\psi_a \xrightarrow{CP} \eta_a \gamma^0 C(\bar{\psi}_a)^T, \quad \phi_k \xrightarrow{CP} \eta_k \phi_k^\dagger. \quad (2.30)$$

この変換の下でラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{yukawa} \rightarrow \eta_a^* \eta_b \eta_k f_{ab}^k \bar{\psi}_b \psi_a \phi_k^\dagger + \eta_a \eta_b^* \eta_k^* f_{ab}^{k*} \bar{\psi}_a \psi_b \phi_k, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} \rightarrow \eta_i \eta_j \eta_k \kappa_{ijk} \phi_i^\dagger \phi_j^\dagger \phi_k^\dagger + \eta_i \eta_j \eta_k \eta_l \lambda_{ijkl} \phi_i^\dagger \phi_j^\dagger \phi_k^\dagger \phi_l^\dagger + (h.c.). \quad (2.32)$$

となる．よって理論が CP 不変であるには任意の添字の組合せに対して

$$f_{ab}^k = \eta_a \eta_b^* \eta_k^* f_{ab}^{k*}, \quad \text{and so on,} \quad (2.33)$$

にとれる事が必要となる．湯川結合やスカラー場の自己結合が複数ある場合には必ずしも全ての結合定数に対してこの条件を満足させることはできず，その時に CP 対称性は成立しない．これはまた次のように表現できる．複素場の位相は自由に変えても物理は変わらないということを用いて結合定数の位相を変化させることができる．この時全ての結合定数が実数になるようにできるならば（位相因子を 1 にとって）理論は CP 不変となるが，そうでない時に CP は破れるのである．

2.5 Observable of CP violation in S matrix

CP の破れが実験でどのように現れるかを考える．CP の破れはラグランジアンでの複素位相 (CP phase) θ^{CP} として現れるので，CP の破れに関わる現象の確率振幅は

$$Amp = e^{i\theta^{CP}} A \quad (2.34)$$

という形になる．観測量は振幅の絶対値の自乗であるから，一つの振幅しか寄与しない場合には CP の破れは見えない．CP の破れの観測には二つ以上の振幅の干渉が必要となる．

$X \rightarrow Y$ という過程の振幅を考える．異なる CP 位相の二つの振幅がその過程に寄与するならば

$$Amp(X \rightarrow Y) = e^{i\theta_1^{CP}} |A_1| e^{i\delta_1} + e^{i\theta_2^{CP}} |A_2| e^{i\delta_2}. \quad (2.35)$$

ここで $\delta_{1,2}$ は散乱過程における phase shift や振動による e^{-iEt} の位相など，CP 位相とは独立な位相である．確率はこの絶対値の自乗に比例する

$$|Amp(X \rightarrow Y)|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1 A_2| \cos(\theta_1^{CP} - \theta_2^{CP} + \delta_1 - \delta_2) \quad (2.36)$$

CP 反転した過程の振幅では $\theta_i \rightarrow -\theta_i$ となるが CP とは独立な位相 $\delta_{1,2}$ は変わらない．よって CP の破れは干渉部分として現れる：

$$\begin{aligned} \text{CP asymmetry} & \propto |Amp(X \rightarrow Y)|^2 - |Amp(X^{CP} \rightarrow Y^{CP})|^2 \\ & = -4|A_1 A_2| \sin \Delta^{CP} \sin \Delta\delta, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\Delta^{CP} \equiv \theta_1^{CP} - \theta_2^{CP}, \quad \Delta\delta \equiv \delta_1 - \delta_2 \quad (2.38)$$

CP の破れが見えるためには，二つの振幅の CP 位相と CP とは独立な位相の双方が異なることが必要となる．例えば中性 B 中間子の semi-leptonic 崩壊では $B^0 - \bar{B}^0$ 混合への寄与のうち中間状態が virtual なもの (M_{12}) と real なもの (Γ_{12}) との干渉がきき，CP asymmetry は $\text{Im}(\Gamma_{12}/M_{12})$ に依存する．

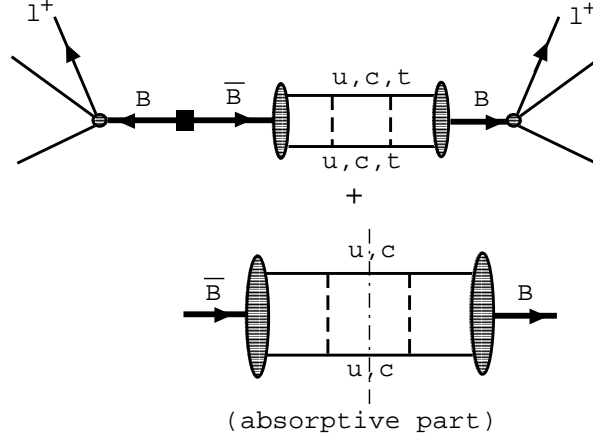


図 2.1: Dissipative and absorptive parts of B^0 - \bar{B}^0 mixing contributing to CP asymmetry in semi-leptonic B decay.

2.6 Electric dipole moment

CP の破れの重要な観測量の一つに電気双極子能率 (Electric Dipole Moment) がある:

$$\mathcal{L}_{\text{EDM}} = id \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi F^{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

この量は d が実数の場合にエルミートであり, P odd, CP odd である. 非相対論極限をとるために γ 行列の Dirac 表示をとると,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

Lorentz 変換の生成子 $\sigma_{\mu\nu}$ は次のようになる:

$$\sigma^{0k} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

この時 Dirac 方程式の解で large component だけを残して

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

と置くと,

$$\bar{\psi} \sigma_{0k} \gamma_5 \psi F^{0k} = i \chi^\dagger \sigma^k \chi F^{0k} \implies \boldsymbol{\sigma}_{\text{spin}} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.43)$$

$$\bar{\psi} \sigma_{ij} \gamma_5 \psi F^{ij} = 0, \quad (2.44)$$

となつて, 式 (2.39) が電気双極子能率となることがわかる.

現在の実験からは電子, 中性子に対しては以下の制限が得られている [1]:

$$|d(e)| < (0.18 \pm 0.16) \times 10^{-26} e \text{ cm} \quad |d(n)| < 0.97 \times 10^{-25} e \text{ cm}. \quad (2.45)$$

標準模型では中性子の電気双極子能率は 3 loop ($O(G_F^2) \times \text{QCD correction}$) のオーダーで現れ, その値は $10^{-30} e \text{ cm}$ 以下とされている. 詳しい計算は避けて次元解析でこの値を見積もってみる:

$$|d(n)|_{SM} \sim \frac{\alpha_S G_F^2}{\pi^2} m_N^3 J \sim \frac{\alpha_S G_F^2}{\pi^2} m_N^3 \lambda^6 \sim 10^{-30} e \text{ cm}. \quad (2.46)$$

ここで α_S は QCD の微細構造定数, m_N は中性子質量, J は式 (1.32) で定義された CP の破れのパラメータである.

標準模型を越える新しい物理の存在に, この制限は大変厳しいものとなる. 新粒子の質量を M とし, それとクォークとの結合定数を f とすると, もしこれが電気双極子能率に寄与するなら

$$|d(n)|_{\text{new}} \sim \frac{\text{Im}(f^2)}{M^2} m_q < 10^{-25} e \text{ cm} \quad (2.47)$$

という制限がつく. m_q はクォーク質量であり, これを第一世代のものとして $O(1)$ MeV にとるならば, $M > |\text{Im}f| \times 10 \text{ TeV}$ という制限になる.

ゲージボソンの部分で CP を破る演算子として

$$\tilde{F}^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \quad (2.48)$$

がある. これは計算すると全微分となって寄与しないように思えるが真空の topology 的性質を考慮すると非摂動的効果によって物理に影響を与えうる [2]. この効果を考慮すると Lagrangian に以下の請うが加わる:

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a, \quad (2.49)$$

ここで θ は任意のパラメータである. この項は P と CP を破り, 中性子の電気双極子能率に

$$|d(n)| \sim \theta \times 10^{-16} e \text{ cm} \quad (2.50)$$

の寄与を与える [3]. 実験の制限から $\theta < 10^{-9}$ でなければならないが, 標準模型ではこれを自然に説明することはできない. これを「strong CP の問題」とよぶ. Peccei と Quinn によって理論にある種の対称性を課すことにより自然に θ が小さくなる機構が示されたが [4]. それを用いた場合には軽いスカラー粒子 (axion) が現れることが示されている [5].

演習問題

1. P 不変なフェルミオンとして $\psi = \eta_P \gamma^0 \psi$ なる条件を課しても, 正当な Lorentz 変換性を示すフェルミオンは得られないことを示せ.
2. ゲージボソンの Parity 変換を求めよ.
3. 荷電共役行列 C が $C^T = C^\dagger = -C = C^{-1}$ を満たす時, Majorana フェルミオンについて以下を示せ.

$$\overline{\psi}_M \psi_M = (\eta_C)^* \psi^T C \psi = \eta_C \overline{\psi}_M C (\overline{\psi}_M)^T$$

4. $i d \overline{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi F^{\mu\nu}$ は d が実数の時エルミートであり, P odd かつ CP odd であることを示せ.
5. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a$ が全微分であることを示せ.

関連図書

- [1] C.Caso et.al. (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998).
- [2] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz and Yu.S.Tyupkin, Phys.Lett. **59B**, 85 (1975).
G.'t Hooft, Phys.Rev. **D14**, 3432 (1976).
- [3] V.Baluni, Phys.Rev. **D19**, 2227 (1978).
- [4] R.D.Pecci and H.Quinn, Phys.Rev.Lett. **38**, 1440 (1977); Phys.Rev. **D16**, 1791 (1977).
- [5] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. **40**, 223 (1978).
F.Wilczek, Phys.Rev.Lett. **40**, 279 (1978).

第3章 Neutral meson system

3.1 K and B mesons

CP の破れとフレーバー物理の主役である K 中間子と B 中間子についてまず説明する． s クォークとそれより軽い反クォークとの束縛状態およびそれらの反粒子を K 中間子とよぶ．同様に b クォークとそれより軽い反クォークとの束縛状態およびそれらの反粒子は B 中間子とよばれる．

擬スカラー	$K^+ (\bar{s}u)$	$K^0 (\bar{s}d)$	$K^- (s\bar{u})$	$\bar{K}^0 (s\bar{d})$
ベクトル	K^{+*}	K^{0*}	K^{-*}	\bar{K}^{0*}

擬スカラー	$B^+ (\bar{b}u)$	$B^0 (\bar{b}d)$	$B_s^0 (\bar{b}s)$	$B_c^+ (\bar{b}c)$
	$B^- (b\bar{u})$	$\bar{B}^0 (b\bar{d})$	$\bar{B}_s^0 (b\bar{s})$	$B_c^- (b\bar{c})$
ベクトル	B^{+*}	B^{0*}	B_s^{0*}	B_c^{+*}
	B^{-*}	\bar{B}^{0*}	\bar{B}_s^{0*}	B_c^{-*}

(ベクトル中間子を示す * は複素共役ではないことに注意せよ．) さらに上のレベルの共鳴状態も存在するし， s or b クォークを含んだ 3 つのクォークからなるバリオンも存在する．しかし以下の議論で最も興味があるのは $K^0, \bar{K}^0, K^\pm, B^0, \bar{B}^0, B^\pm$ である．

K^\pm 中間子の質量と寿命はそれぞれ

$$M(K^\pm) = 494.7 \text{ MeV}, \tau(K^\pm) = 1.24 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

である．一方中性中間子では図のようなグラフの寄与によって $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ や $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ の遷移 (粒子-反粒子混合) が起こり， $K^0 (B^0)$ と $\bar{K}^0 (\bar{B}^0)$ の一次結合が二つの質量・寿命の固有状態をなす．

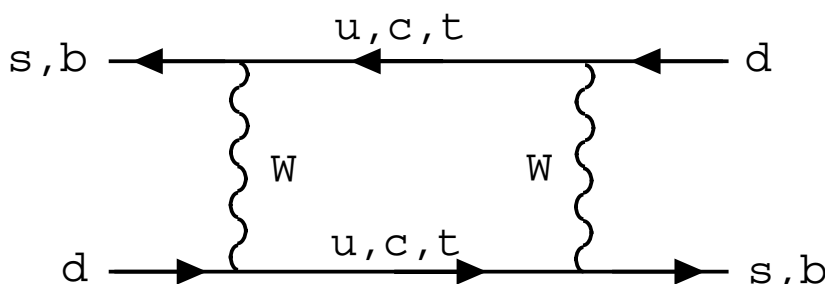


図 3.1: A box diagram of $K (B)-\bar{K} (\bar{B})$ mixing

$$\begin{aligned}
 M(K_S) &= 497.7 \text{ MeV}, \tau(K_S) = (0.8934 \pm 0.0008) \times 10^{-10} \text{ sec} \\
 M(K_L) &= 497.7 \text{ MeV}, \tau(K_L) = (5.17 \pm 0.04) \times 10^{-8} \text{ sec} \\
 \Delta M_K &\equiv M(K_L) - M(K_S) = (3.489 \pm 0.009) \times 10^{-12} \text{ MeV} \\
 \Delta \Gamma_K &\equiv \Gamma(K_L) - \Gamma(K_S) \cong -\Gamma(K_S) = -\frac{1}{\tau(K_S)} \simeq -2\Delta M_K
 \end{aligned}$$

B 中間子では質量，寿命ともにほとんど縮退しており，中性 B 中間子での二つの質量・寿命の固有状態の寿命の差を測定することはまだできていない．

$$\begin{aligned} M_B &\cong 5.28 \times 10^3 \text{ MeV}, \quad \tau(B^\pm) = (1.65 \pm 0.04) \times 10^{-12} \text{ sec}, \quad \tau(B^0) = (1.56 \pm 0.04) \times 10^{-12} \text{ sec}, \\ \Delta M_B &= (3.05 \pm 0.12) \times 10^{-10} \text{ MeV} \end{aligned}$$

K, B 中間子の崩壊や粒子-反粒子混合は W ボソンを交換する弱い相互作用によって起こる．よってそれらを調べることにより小林・益川行列要素の大きさや CP の破れに関わる位相を決定することができる．

3.2 Quantum mechanics of neutral meson system

中性 K, B 中間子混合の量子力学的取り扱いについて説明する．まず K^0 ($\bar{s}d$), B^0 ($\bar{b}d$) 等の擬スカラー-中性中間子を一般的に X^0 と書いて，その CP 変換を次式で定義する：

$$CP|X^0\rangle = \eta_{CP}|\bar{X}^0\rangle. \quad (3.1)$$

ここで η_{CP} は CP 変換に伴う位相で (後の議論を consistent にする限り) 自由にとれる．以下では簡単のため $\eta_{CP} = -1$ の convention をとる．時刻 t での中間子 X を表す状態を $|X(t)\rangle$ と書き，これを $|X^0\rangle$ と $|\bar{X}^0\rangle$ で展開する：

$$|X(t)\rangle = \alpha(t)|X^0\rangle + \beta(t)|\bar{X}^0\rangle. \quad (3.2)$$

Schrödinger 方程式は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}|X(t)\rangle &= H|X(t)\rangle, \\ &\Downarrow \\ i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle X^0|H|X^0\rangle & \langle X^0|H|\bar{X}^0\rangle \\ \langle \bar{X}^0|H|X^0\rangle & \langle \bar{X}^0|H|\bar{X}^0\rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

中性中間子は安定でなく崩壊するので，波動関数が $e^{-i(E-i\gamma/2)t}$ のように振舞うことから，2つの Hermite 行列 M と Γ を用いて Hamiltonian を $H = M - (i/2)\Gamma$ とあらわす：

$$\begin{aligned} \langle X^0|H|X^0\rangle &\equiv M_{11} - (i/2)\Gamma_{11}, & \langle X^0|H|\bar{X}^0\rangle &\equiv M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}, \\ \langle \bar{X}^0|H|X^0\rangle &\equiv M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*, & \langle \bar{X}^0|H|\bar{X}^0\rangle &\equiv M_{22} - (i/2)\Gamma_{22}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

CPT 対称性の成立を仮定して粒子と反粒子の質量と寿命が等しいとすると，

$$\langle X^0|H|X^0\rangle = \langle \bar{X}^0|H|\bar{X}^0\rangle \equiv M_0 - (i/2)\Gamma_0. \quad (3.5)$$

この 2×2 行列の固有値と固有ベクトルは次のように与えられる；

$$\lambda_\pm = M_0 - (i/2)\Gamma_0 \pm \sqrt{[M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}][M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*]}, \quad (3.6)$$

(ここでは $\text{Re}(\sqrt{[M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}][M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*]}) > 0$ となるように平方根の符号を取っている.)

$$\text{eigenvectors : } |X_\pm\rangle = \frac{p|X^0\rangle \pm q|\bar{X}^0\rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}, \quad (3.7)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{[M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}][M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*]}}{M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}}. \quad (3.8)$$

2つの固有状態の質量と寿命の差を ΔM , $\Delta\Gamma$ と書くと,

$$\Delta M = 2\text{Re} \left(\sqrt{[M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}][M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*]} \right), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma &= -4\text{Im} \left(\sqrt{[(M_{12} - (i/2)\Gamma_{12})][(M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*)]} \right) \\ &= \frac{4}{\Delta M} \text{Re}(M_{12}\Gamma_{12}^*) \end{aligned} \quad (3.10)$$

CP の固有状態は $CP|X^0\rangle = -|\overline{X^0}\rangle$ の convention で

$$|X_{\text{even}}\rangle = (|X^0\rangle - |\overline{X^0}\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.11)$$

$$|X_{\text{odd}}\rangle = (|X^0\rangle + |\overline{X^0}\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.12)$$

である．これを使って固有状態 X_{\pm} をあらわすと,

$$|X_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(|p|^2 + |q|^2)}} [(p \mp q)|X_{\text{even}}\rangle + (p \pm q)|X_{\text{odd}}\rangle]. \quad (3.13)$$

よって今の convention では $p = \pm q$ の時に質量・寿命の固有状態と CP の固有状態が一致する．(一般には $|q/p| = 1$ で両者は一致する．)

次にこの系の時間発展を調べる．時刻 $t = 0$ で X^0 の状態にあった粒子を考えよう．

$$|X^0\rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} (|X_+\rangle + |X_-\rangle). \quad (3.14)$$

質量・寿命の固有状態 $|X_{\pm}\rangle$ は $e^{-i\lambda_{\pm}t}$ の時間発展をするので,

$$\begin{aligned} |X^0(t)\rangle &= \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} (e^{-i\lambda_+t}|X_+\rangle + e^{-i\lambda_-t}|X_-\rangle) \\ &= \frac{e^{-i\lambda_+t}}{2} \left[g_+(t)|X^0\rangle + \frac{q}{p}g_-(t)|\overline{X^0}\rangle \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$g_{\pm}(t) = 1 \pm e^{i\{\Delta M - (i/2)\Delta\Gamma\}t}. \quad (3.16)$$

同様にして時刻 $t = 0$ で $\overline{X^0}$ であった粒子の時間発展は

$$|\overline{X^0}(t)\rangle = \frac{e^{-i\lambda_+t}}{2} \left[\frac{p}{q}g_-(t)|X^0\rangle + g_+(t)|\overline{X^0}\rangle \right] \quad (3.17)$$

で与えられる．これらより X^0 ($\overline{X^0}$) として生成された粒子が時刻 $t = 0$ で $\overline{X^0}$ (X^0) として観測される確率は以下ようになる：

$$\begin{aligned} P(X^0 \rightarrow \overline{X^0}; t) &= |\langle \overline{X^0} | X^0(t) \rangle|^2 = \frac{e^{-(\Gamma + \Delta\Gamma)t}}{4} \left| \frac{q}{p}g_-(t) \right|^2 \\ &= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left| \frac{q}{p} \right|^2 [\cosh(\Delta\Gamma t/2) - \cos(\Delta M t)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} P(\overline{X^0} \rightarrow X^0; t) &= |\langle X^0 | \overline{X^0}(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left| \frac{p}{q} \right|^2 [\cosh(\Delta\Gamma t/2) - \cos(\Delta M t)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

さらにこれらを $t = 0 \sim \infty$ で積分したもものから $X^0 \leftrightarrow \overline{X^0}$ の確率が得られる：

$$r \equiv \frac{P(X^0 \rightarrow \overline{X^0})}{P(X^0 \rightarrow X^0)} = \left| \frac{q}{p} \right|^2 \frac{(\Delta M)^2 + (\Delta\Gamma/2)^2}{2\Gamma^2 + (\Delta M)^2 - (\Delta\Gamma/2)^2}, \quad (3.20)$$

$$\bar{r} \equiv \frac{P(\overline{X^0} \rightarrow X^0)}{P(\overline{X^0} \rightarrow \overline{X^0})} = \left| \frac{p}{q} \right|^4 r. \quad (3.21)$$

これらの結果から, $|p/q|$ が 1 でないと CP の破れがあり, それは M_{12}/Γ_{12} が実でないことに対応するということになる. これを mixing における CP の破れとよぶ.

クォ - ク位相の変化による諸量の変化について見てみよう. 小林・益川行列のところで述べたようにクォ - クの位相は自由に变化させることができ (その一例が小林・益川行列の parametrization の仕方が幾通りもあることである), 物理はその位相変化によって変わることは無い. クォ - クの位相を次のように变化させたとして,

$$q_x \rightarrow \exp(i\alpha_x)q_x, \quad (3.22)$$

すると $X^0-\bar{X}^0$ 混合の effective Hamiltonian は

$$\mathcal{H}_{eff} = f(\bar{q}_y\Gamma q_x)^2 \rightarrow \mathcal{H}'_{eff} = \exp\{2i(\alpha_x - \alpha_y)\}\mathcal{H}_{eff} \quad (3.23)$$

となる. (この Γ は γ 行列の適当な組合せである.) そして混合の matrix element が以下のように变化する,

$$\begin{aligned} \langle X^0 | \mathcal{H}_{eff} | \bar{X}^0 \rangle &= M_{12} - (i/2)\Gamma_{12} \\ \rightarrow \exp\{2i(\alpha_x - \alpha_y)\} [M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

このように位相の変化によって値が変わるので M_{12} や Γ_{12} 自身は物理量では無い. 一方, 例えば二つの固有状態の質量や寿命の差は実験で直接測ることのできる物理的な量であり,

$$\Delta M - (i/2)\Delta\Gamma = 2\sqrt{[(M_{12} - (i/2)\Gamma_{12})][(M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*)]} \quad (3.25)$$

は位相変換に対して不変になっている. また CP の破れの measure の一つである $|p/q|$ も不変である.

3.3 K meson の性質

中性 K 中間子には寿命の短い K_S と長い K_L があり, 質量は K_L の方がわずかに (約 3.5×10^{-12} MeV) 大きいので K_S は X_- に対応し, $\Delta\Gamma_K < 0$ である. K_S はほとんど $\pi\pi$ (CP even) に崩壊するので, CP 対称性が成立しているなら $K_S = X_- = X_{even}$ となって $|p/q| = 1$ である. ところが Cronin, Fitch らの実験によって K_L も微小な確率 (約 0.2 %) ではあるが $\pi\pi$ に崩壊することが観測され [1], K 中間子系で CP が破れていることがわかった. K 中間子系を扱う場合には p, q よりも

$$\frac{q}{p} \equiv \frac{1 - \epsilon_m}{1 + \epsilon_m} \quad (3.26)$$

で定義したパラメータをよく用いる. これを用いると

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon_m|^2)}} [(1+\epsilon_m)|K^0\rangle + (1-\epsilon_m)|\bar{K}^0\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+|\epsilon_m|^2)}} [|K_{odd}\rangle + \epsilon_m|K_{even}\rangle], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon_m|^2)}} [(1+\epsilon_m)|K^0\rangle - (1-\epsilon_m)|\bar{K}^0\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+|\epsilon_m|^2)}} [|K_{even}\rangle + \epsilon_m|K_{odd}\rangle], \end{aligned} \quad (3.28)$$

と表せて ϵ_m が CP の破れのパラメータであることがわかり, 我々の convention では実験値から $O(10^{-3})$ となる. (しかしこの ϵ_m は位相の convention の取り方によって変わるので物理量ではない.)

K 中間子系では，CP の破れは存在するが非常に小さいので $|p/q| \cong 1$ である．また ΔM_K と $\Delta\Gamma_K$ の大きさが same order である．これらの事実と式 (3.9) より， M_{12} と Γ_{12} の複素位相はほとんど等しいといえる．すると，式 (3.25) が以下のように近似できる：

$$\begin{aligned}\Delta M - (i/2)\Delta\Gamma &= 2|M_{12}|\sqrt{1 - i\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)^2} \\ &\cong 2|M_{12}|\left[1 - \frac{i}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right].\end{aligned}\quad (3.29)$$

よって K 中間子の場合には以下の近似式が成立する：

$$\Delta M \cong 2|M_{12}|, \quad \Delta\Gamma \cong 2|M_{12}|\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right).\quad (3.30)$$

さらに M_{12}, Γ_{12} がほとんど実になるような convention をとった場合 (標準模型において，よく使われる小林・益川行列の phase convention をとった場合はこれにあてはまる) では，以下の近似式も成立する：

$$\Delta M \cong 2\operatorname{Re}M_{12}, \quad \Delta\Gamma \cong 2\operatorname{Re}\Gamma_{12}, \quad \epsilon_m \cong \frac{e^{i\pi/4}\operatorname{Im}M_{12}}{\sqrt{2}\Delta M}.\quad (3.31)$$

これらは式の形からわかるように位相の convention に依存しているので，使う場合には注意が必要である．また最後の ϵ_m の式では $\Delta M \simeq -2\Delta\Gamma$ という事実も用いている．

混合と CP の破れを測る具体的な実験について紹介しよう．まず， K_L の semi-leptonic 崩壊をみる．時刻 $t=0$ で K^0 である状態を用意し，その lepton をともなう崩壊を調べる．時刻 t での状態は次式で与えられる，

$$\begin{aligned}|K^0(t)\rangle &= \frac{\sqrt{1+|\epsilon_m|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon_m)}[|K_L(t)\rangle + |K_S(t)\rangle] \\ &= \frac{\sqrt{1+|\epsilon_m|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon_m)}[\exp\{-i(M_L - i\Gamma_L/2)t\}|K_L\rangle + \exp\{-i(M_S - i\Gamma_S/2)t\}|K_S\rangle] \\ &= \frac{1}{2}\exp\{-i(M_S - i\Gamma_S/2)t\} \\ &\quad \times \left\{ [e^{-i(\Delta M - i\Delta\Gamma/2)t} + 1]|K^0\rangle + [e^{-i(\Delta M - i\Delta\Gamma/2)t} - 1]\left(\frac{1-\epsilon_m}{1+\epsilon_m}\right)|\overline{K^0}\rangle \right\}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

測る量は時刻 t での崩壊によってできる正電荷のレプトン数 N^+ と負電荷のレプトン数 N^- の asymmetry $\delta(t)$ である．

$$\delta(t) = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-}.\quad (3.33)$$

崩壊の前後でのハドロン の strangeness の変化と電荷の変化は等しいという $\Delta S = \Delta Q$ 則を仮定すると，(これは s クォークが仮想 W^- を放出して u クォークになることを考えれば標準模型で weak の一次では当然成立している) K^0 からは正電荷のレプトンが， $\overline{K^0}$ からは負電荷のレプトンが出てくる．この崩壊振幅は

$$\begin{aligned}A_- &\equiv \langle\pi^+l^-\bar{\nu}|\mathcal{H}|K^0(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\exp\{-i(M_S - i\Gamma_S/2)t\}\{e^{-i(\Delta M - i\Delta\Gamma/2)t} - 1\}\left(\frac{1-\epsilon_m}{1+\epsilon_m}\right)\langle\pi^+l^-\bar{\nu}|\mathcal{H}|\overline{K^0}\rangle\end{aligned}\quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}A_+ &\equiv \langle\pi^-l^+\nu|\mathcal{H}|K^0(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\exp\{-i(M_S - i\Gamma_S/2)t\}\{e^{-i(\Delta M - i\Delta\Gamma/2)t} + 1\}\langle\pi^-l^+\nu|\mathcal{H}|K^0\rangle\end{aligned}\quad (3.35)$$

で与えられ，さらに CPT 定理より

$$|\langle\pi^+l^-\bar{\nu}|\mathcal{H}|\overline{K^0}\rangle| = |\langle\pi^-l^+\nu|\mathcal{H}|K^0\rangle|,\quad (3.36)$$

これから次の結果を得る：

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \frac{|A_+|^2 - |A_-|^2}{|A_+|^2 + |A_-|^2} \\ &\cong 2\text{Re}(\epsilon_m) + \frac{2e^{-\Delta\Gamma t/2} \cos(\Delta Mt)}{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

よって実験で $\delta(t)$ を測りそのデータを上のに fit させることにより混合 ΔM と CP の破れ $\text{Re}(\epsilon_m)$ を求めることができる。

CP の破れだけを測るのであれば K_L の semi-leptonic 崩壊で

$$\delta \equiv \frac{\Gamma[K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu] - \Gamma[K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}]}{\Gamma[K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu] + \Gamma[K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}]}\quad (3.38)$$

を測定すればよい。 $\Delta S = \Delta Q$ 則を仮定すれば式 (3.27) より

$$\delta = \frac{|1 + \epsilon_m|^2 - |1 - \epsilon_m|^2}{|1 + \epsilon_m|^2 + |1 - \epsilon_m|^2} = \frac{2\text{Re}(\epsilon_m)}{1 + |\epsilon_m|^2 + 2\text{Re}(\epsilon_m)} \cong 2\text{Re}(\epsilon_m).\quad (3.39)$$

最後の近似式は ϵ_m の大きさが小さくなる phase convention でのものである。実験値は [2]

$$\delta = (3.27 \pm 0.12) \times 10^{-3}.\quad (3.40)$$

次に中性 K 中間子の 2π への崩壊における CP の破れを測る実験について紹介する。前に述べたように中性 K 中間子には寿命の長い K_L と短い K_S の 2 種類があり、前者は主に semi-leptonic 崩壊や 3π への崩壊をする。一方、後者は主に 2π に崩壊する。 2π 状態の CP 固有値は $+1$ なので、CP が保存されていれば K_S が CP+ の K_{even} 、 K_L が CP- の K_{odd} に対応することになる。しかしながら実験では K_L の 2π への崩壊が僅かではあるが観測されている。これは前に説明したように質量固有状態 K_L が K_{even} と K_{odd} の重ね合わせであるためと理解することができる、

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\epsilon_m|^2}}[|K_{\text{odd}}\rangle + \epsilon_m |K_{\text{even}}\rangle].\quad (3.41)$$

すなわち、 K_L 中のわずかな K_{even} 成分が 2π への崩壊を導くという解釈である。この CP の破れはパラメータ ϵ_m で表され、混合における CP の破れである。これとは別に $\Delta S = 1$ の相互作用 Hamiltonian 自身に CP の破れがあって K_{odd} が直接 2π へ崩壊する直接的な CP の破れというものも考えられる。この 2 つの CP の破れが両方とも、あるいは片方だけが存在するのかという問題は現実的なモデルを選択する上で大きな指針となるので、実験で詳しく調べることが必要である。

パラメータ ϵ_m 自身はクォークの位相変換によって変化するので物理量ではなく、実際に実験で測るべき量は次の二つである：

$$\eta_{+-} \equiv \frac{A(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{A(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}, \quad \eta_{00} \equiv \frac{A(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{A(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)}.\quad (3.42)$$

これらは複素数であり、その絶対値は崩壊比から、位相は K_L 、 K_S 両方の成分をもつビームでの実験で両成分の干渉から等で測る。具体的に η_{+-} の場合には、その絶対値は次の量の測定で得られる：

$$|\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}.\quad (3.43)$$

位相は初期状態

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |K_L\rangle + \beta |K_S\rangle\quad (3.44)$$

のビームを用意すると、この時刻 t での $\pi^+ \pi^-$ への崩壊振幅は

$$\begin{aligned}&\langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H} | \psi(t) \rangle \\ &= \exp\{-i(M_S - i\Gamma_S/2)t\} \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H} | K_S \rangle [\eta_{+-} \alpha e^{-i(\Delta M - i\Delta\Gamma/2)t} + \beta],\end{aligned}\quad (3.45)$$

となるため, $\pi^+\pi^-$ の production rate の時間発展をみて,

$$\begin{aligned} (\text{rate}) \propto & |\alpha\eta_{+-}|^2 \exp(-\Gamma_L t) + |\beta|^2 \exp(-\Gamma_S t) \\ & + 2|\alpha\beta\eta_{+-}| \exp\{-(\Gamma_L + \Gamma_S)t/2\} \cos\{(\theta_\alpha - \theta_\beta + \phi_{+-} - \Delta M)t\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

その振動の様子から決定できる (ここで $\theta_\alpha, \theta_\beta, \phi_{+-}$ はそれぞれ α, β, η_{+-} の位相である.)

実験で η_{+-}, η_{00} の値が得られたとして, 理論的解析には以下のパラメータを定義する:

$$\epsilon \equiv \frac{A[K_L \rightarrow \pi\pi (I=0)]}{A[K_S \rightarrow \pi\pi (I=0)]} = \frac{i\text{Im}A_0 + \epsilon_m \text{Re}A_0}{\text{Re}A_0 + i\epsilon_m \text{Im}A_0}, \quad (3.47)$$

$$\epsilon_2 \equiv \frac{A[K_L \rightarrow \pi\pi (I=2)]}{\sqrt{2}A[K_S \rightarrow \pi\pi (I=0)]} = \frac{i\text{Im}A_2 + \epsilon_m \text{Re}A_2}{\sqrt{2}[\text{Re}A_0 + i\epsilon_m \text{Im}A_0]} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}, \quad (3.48)$$

$$\omega \equiv \frac{A[K_S \rightarrow \pi\pi (I=2)]}{A[K_S \rightarrow \pi\pi (I=0)]} = \frac{\text{Re}A_2 + i\epsilon_m \text{Im}A_2}{\text{Re}A_0 + i\epsilon_m \text{Im}A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}, \quad (3.49)$$

ここで $\delta_I (I=0, 2)$ は強い相互作用からの phase shift であり,

$$A[K^0 \rightarrow \pi\pi (I=J)] \equiv A_J e^{i\delta_J}. \quad (3.50)$$

また CPT 不変性を仮定して

$$A[\bar{K}^0 \rightarrow \pi\pi (I=J)] = -A_J^* e^{i\delta_J}, \quad (3.51)$$

を用いている. これらの量から次の関係式を得る:

$$\eta_{+-} = \frac{\epsilon + \epsilon_2}{1 + \omega/\sqrt{2}} = \epsilon + \epsilon' + O(\omega\epsilon'), \quad (3.52)$$

$$\eta_{00} = \frac{\epsilon - 2\epsilon_2}{1 - \sqrt{2}\omega} = \epsilon - 2\epsilon' + O(\omega\epsilon'), \quad (3.53)$$

ここで

$$\epsilon' \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{Im}A_2}{\text{Re}A_0} - \frac{\text{Re}A_2 \text{Im}A_0}{(\text{Re}A_0)^2} \right] e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \cong \epsilon_2 - \frac{\omega}{\sqrt{2}} \epsilon' \quad (3.54)$$

と定義され, これは A_0, A_2 の虚部で書かれているので K_2 の 2π への崩壊に関連した量であり (K_2 と A_I の定義を見よ) 直接的な CP の破れを表している.

実験では $|\eta_{00}/\eta_{+-}|^2 \cong 1 - 6\text{Re}(\epsilon'/\epsilon)$ の測定から

$$\text{Re}(\epsilon'/\epsilon) = (1.5 \pm 0.8) \times 10^{-3} \quad (3.55)$$

という値を得ている [2].

K 中間子に関する実験の統計がこれまでの蓄積と技術の進歩によって上がっていくにしたがって, $2\pi, 3\pi$ や $\pi l\nu$ といった主モードの崩壊だけでなく分岐比の微少な稀崩壊も近年よく調べられつつある. その中には FCNC の存在や CP の破れに関して重要な情報を伝えるものがあり関心が高まっている. ここではその一例として K_L の $\pi^0 e^+ e^-$ への崩壊を見てみる [3]. この崩壊には次の三つのプロセスが寄与する:

$$\begin{aligned} A &: K_{\text{odd}} \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma \quad (CP -) \rightarrow \pi^0 e^+ e^- \\ B &: K_{\text{odd}} \rightarrow \pi^0 \gamma^* \quad (CP +) \rightarrow \pi^0 e^+ e^- \\ C &: \epsilon K_{\text{even}} \rightarrow \pi^0 \gamma^* \quad (CP +) \rightarrow \pi^0 e^+ e^- \end{aligned}$$

A は CP を保存しており, B は直接的な CP の破れ, C は混合による CP の破れである. 分岐比にして A は $6 \times 10^{-12} \sim 10^{-11}$ かそれ以下, B は 7×10^{-11} 以下, C は 6×10^{-12} 位の寄与をなすと見積もられているので, もしも 10^{-11} より大きい分岐比が観測されれば CP の破れによるものと考えられる.

$K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 崩壊も分岐比約 10^{-8} の稀崩壊であるが、分岐比の大きさ自身は 2γ の CP を保存する中間状態からの寄与がほとんどである。しかしながら生成される μ^- の縦偏極の非対称性

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

($N_{R(L)}$ は右(左)巻きの μ^- の数) の存在が CP の破れの存在を示唆する。標準模型では混合による CP の破れから $P \simeq 7 \times 10^{-4}$ の寄与があり、もしもこれを越える非対称性が観測されれば新しい物理が必要となり非常に興味深い [4].

3.4 B meson の性質

次に B 中間子の場合を考察する。まず Γ_{12} と M_{12} の大きさを比較してみる。今のところ中性 B^0 中間子の二つの質量・寿命の固有状態間の寿命の差は観測できていなくて $\Delta\Gamma/\Gamma \ll 1$ である。一方 $B^0-\overline{B}^0$ 混合は大きな確率(約 0.2) が観測されている。また理論的には $|q/p| \simeq 1$ と予想されている。よって $\Delta M/\Gamma \sim 0.7$ 。これと式 (3.9), (3.10) から

$$|M_{12}|^2 - (|\Gamma_{12}|^2/4) \gg |\text{Re}[M_{12}\Gamma_{12}^*]|. \quad (3.56)$$

これを満たすには $|M_{12}| \gg |\Gamma_{12}|$ であるか、あるいは $|M_{12}| \sim |\Gamma_{12}|$ ならば $M_{12}\Gamma_{12}^*$ がほとんど虚数である必要がある。 Γ_{12} へは B^0, \overline{B}^0 の双方が崩壊できるモードが寄与する。そのようなモードへの分岐比は多めに見積もっても $O(10^{-3})$ 以下であるので $|\Gamma_{12}| \leq \Gamma_B \times 10^{-3}$ 。一方 M_{12} にはトップクォークが大きな寄与を与える。よって $|M_{12}| \gg |\Gamma_{12}|$ とするのがもっともである。これを仮定すれば B 中間子系では以下の近似式を用いることができる：

$$\Delta M \cong 2|M_{12}|, \quad (3.57)$$

$$\Delta\Gamma \cong 2|M_{12}|\text{Re}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right), \quad (3.58)$$

$$|q/p|^2 \cong 1 - \text{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right). \quad (3.59)$$

中性 B 中間子で粒子-反粒子混合が存在することは次のようにして確認された。 e^+e^- 衝突によって $B^0-\overline{B}^0$ 対を生成し、その semi-leptonic 崩壊(荷電 lepton, ニュートリノとハドロンへの崩壊)をみる。 b クォークは仮想 W^- ボソンと u or c クォークへ崩壊し、仮想 W^- から出て来る荷電レプトンは負の電荷を持つ。一方反 b クォークの崩壊から出て来る荷電レプトンは正の電荷を持つ。よって混合がなければ $B^0-\overline{B}^0$ 対の semi-leptonic 崩壊で現れる荷電 lepton の対は常に逆符号の組合せとなるはずである。ところが実験によると同じ符号の荷電 lepton 対の生成が観測された。これは $B^0-\overline{B}^0$ 対の一方の中性 B 中間子が粒子-反粒子混合を起こしたためと解釈できる。混合の measure としては式 (3.20) で $\Delta\Gamma = 0$ と近似したものをを用いて

$$\chi_d \equiv \frac{\Gamma[\overline{B}^0 \rightarrow \overline{B}^0 \rightarrow l^- X]}{\Gamma[B^0 \rightarrow l^\pm X]} = \frac{(\Delta M)^2}{2\Gamma^2 + 2(\Delta M)^2} = \frac{x_d^2}{2(1 + x_d^2)}, \quad (3.60)$$

($x_d \equiv \Delta M/\Gamma$) が用いられる。現在の実験値は

$$\chi_d = 0.172 \pm 0.010 \quad (3.61)$$

である [2]。 B_s 中間子においても同様の混合の measure が定義できるが、こちらはまだ実験的には下限しか得られていない [2]

$$\chi_s > 0.4795. \quad (3.62)$$

B 中間子系での CP の破れについて考えると, K 中間子の時のような混合での CP asymmetry は $|\Gamma_{12}/M_{12}| \ll 1$ と式 (3.59) を考えると微小である. しかし time dependent CP asymmetry という重要なものがある. $B^0, \overline{B^0}$ が共有する CP 固有状態への崩壊モードを f_{CP} とする. 時刻 $t=0$ で B^0 ($\overline{B^0}$) であった B 中間子が時刻 t で f_{CP} に崩壊する rate は, 式 (3.16) を用いて以下のように計算できる:

$$\Gamma[B^0(t) \rightarrow f_{CP}] = \int d\Gamma \frac{e^{-(\Gamma_0+\Delta\Gamma)t}}{4} \left| g_+(t)\langle f_{CP}|B^0\rangle + \frac{q}{p}g_-(t)\langle f_{CP}|\overline{B^0}\rangle \right|^2, \quad (3.63)$$

$$\Gamma[\overline{B^0}(t) \rightarrow f_{CP}] = \int d\Gamma \frac{e^{-(\Gamma_0+\Delta\Gamma)t}}{4} \left| \frac{p}{q}g_-(t)\langle f_{CP}|B^0\rangle + g_+(t)\langle f_{CP}|\overline{B^0}\rangle \right|^2. \quad (3.64)$$

$|q/p| = 1$ と近似し, $\Delta\Gamma t$ を無視すると (B 中間子の崩壊では $t \sim O(1/\Gamma) \ll 1/\Delta\Gamma$)

$$\begin{aligned} Asy[f_{CP}; t] &\equiv \frac{\Gamma[B^0(t) \rightarrow f_{CP}] - \Gamma[\overline{B^0}(t) \rightarrow f_{CP}]}{\Gamma[B^0(t) \rightarrow f_{CP}] + \Gamma[\overline{B^0}(t) \rightarrow f_{CP}]} \\ &= \frac{2}{(2 + c_d)} \left[\text{Im}\left(\frac{q}{p}\rho\right) \sin(\Delta M_B t) - \frac{c_d}{2} \cos(\Delta M_B t) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

ここで ρ, c_d は以下で定義される,

$$\rho \equiv \frac{\langle f_{CP}|\overline{B^0}\rangle}{\langle f_{CP}|B^0\rangle}, \quad c_d \equiv |\rho|^2 - 1. \quad (3.66)$$

c_d は定義からも明らかなように直接的な CP の破れのパラメータとなっている. 今 $|q/p| = 1$ の近似を用いているので K 中間子の時のような semi-leptonic 崩壊での CP の破れは無視していることになるが, q/p (mixing) と ρ (decay amplitude) の干渉による CP の破れが式 (3.65) の第一項に現れている. time dependent asymmetry は式 (3.65) にあるように $\sin(\Delta M_B t), \cos(\Delta M_B t)$ に比例しているので時間について積分してしまうと消えてしまう. このため崩壊の時間変化を測定することが必要である. 加速器で生成された B 中間子がほぼ静止状態にあるような系ではこの時間変化が見えない. よって time dependent asymmetry の測定には生成された B 中間子を高速で走らせてやる必要があり, そのために asymmetric collider や重心系のエネルギーが B 中間子質量の 2 倍よりもはるかに大きい高エネルギー加速器が必要となる.

time dependent asymmetry 以外にも B 中間子の崩壊モードの多様性を活かして直接的な CP の破れを測定する方法がある. 例えば $B^\pm \rightarrow \{D^0, \overline{D^0}\}K^\pm \rightarrow fK^\pm$ (f は $D^0, \overline{D^0}$ 共通の崩壊モード) という崩壊では二つ以上の振幅が寄与するので, それらの干渉によって CP の破れが起こりうる.

中性 B 中間子系における CP の破れはまだ観測されていないが, 標準模型では崩壊のモードによっては数十% 程の大きな破れが予測されており, 近い将来の実験で測定されるものと期待されている.

3.5 Standard model description of neutral meson properties

標準模型における K, B 中間子の物理を調べよう. ここで標準模型としてはクォーク・レプトンが 3 世代で Higgs 場が $SU(2)_L$ 二重項一つだけの $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群ゲージ理論を考える. この時 CP の破れの源は小林・益川行列にある複素位相だけである. 以下では小林・益川行列要素のうち第三世代に関わるものを B 中間子の物理でどのように決定するかを中心に議論する.

3.5.1 Unitarity Triangle

小林・益川行列の各成分を以下のように記す:

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

1.2 節でも紹介したが，この行列のユニタリー性から以下の式が成立する，

$$V_{us}^* V_{ud} + V_{cs}^* V_{cd} + V_{ts}^* V_{td} = 0 \quad \text{for } K \text{ meson,} \quad (3.68)$$

$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0 \quad \text{for } B \text{ meson.} \quad (3.69)$$

この関係式を各項を複素平面上で表すことにより幾何学的に表現した unitarity triangle のうち B 中間子に関わるものを再び示す：

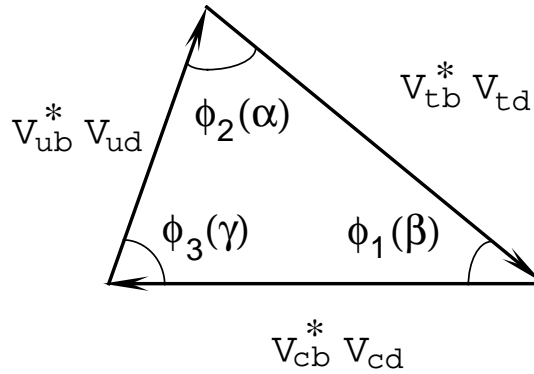


図 3.2: Unitarity triangle: 角度のよび方は Particle Data では α, β, γ であるが，これらは他のパラメータと混同しやすいので，それぞれに対応した ϕ_2, ϕ_1, ϕ_3 というよび方をすることもある．

B factory project の主目的の一つはこの unitarity triangle の三つの辺の長さや三つの角度を決定することである．この三角形が決定されれば小林・益川行列の物理的なパラメータが決定される．もしも実験結果が三角形の条件と矛盾すれば，それは標準模型を超える新しい物理の存在を間接的に示すことになる．

3.5.2 $|V_{cb}|, |V_{ub}|$

$|V_{cb}|, |V_{ub}|$ は B 中間子の semi-leptonic 崩壊で測られる．図のようなプロセスを通じて b クォークが c or u クォークとレプトン対に崩壊する． $|V_{ub}|$ の求め方の一例を示す．簡単のため $b \rightarrow c$ のプロセス

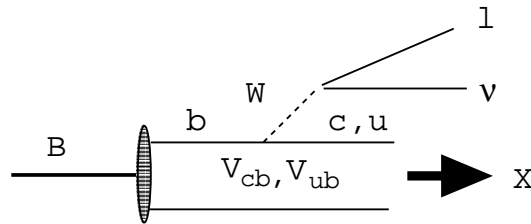


図 3.3: Diagram of semi-leptonic B decay

だけを考え，レプトンの質量を無視し，さらに強い相互作用の影響も無視する．すると b クォークの崩壊幅は μ 粒子の場合と同じように計算でき

$$\Gamma[b \rightarrow cl\nu] = |V_{cb}|^2 \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_b^5 f(m_c/m_b), \quad (3.70)$$

$$f(x) = 1 - 8x^2 + 8x^6 - x^8 - 12x^4 \ln(x^2). \quad (3.71)$$

B 中間子の e または μ への inclusive semi-leptonic 崩壊: $\sum_X \Gamma[B \rightarrow Xl\nu]$ の分岐比は約 10 % なので

$$\Gamma[b \rightarrow cl\nu] \simeq \Gamma_B \times Br(B \rightarrow Xl\nu) \simeq 4.3 \times 10^{-10} \times 0.1 \text{ (MeV)}. \quad (3.72)$$

$m_b = 4.6 \text{ GeV}$, $m_c = 1.5 \text{ GeV}$, $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ を代入すれば $|V_{cb}| \simeq 0.044$ を得る．この見積りでは $b \rightarrow ul\nu$ の寄与を無視しているが，後述するように $|V_{cb}| \gg |V_{ub}|$ なので，この近似は正当化される．より大きな不定性は強い相互作用の影響をどう見積もるかによる．方法としては以下がよく用いられる：

ACM model : 上の方法に QCD correction とハドロン内でのクォークの Fermi motion を考慮した補正を加える [5].

ISGW model : クォーク間ポテンシャルを導入し，中間子の波動関数を計算して，それに相対論的補正を加えて強い相互作用の効果を求める [6] .

HQET : heavy quark symmetry を用いると B 中間子の静止系で見て放出された $D^{(*)}$ 中間子もまた静止する場合には $m_b, m_c \rightarrow \infty$ の極限で対称性から遷移振幅が決定されることを用いる [7] .

これらについてのより詳しい説明は省略して，それぞれの方法で求めた $|V_{cb}|$ の値をだけ示しておく [8] .

model	$ V_{cb} $
ACM (inclusive)	$0.0401 \pm 0.001 \pm 0.004$ (theoretical error)
ISGW (inclusive)	$0.0400 \pm 0.001 \pm 0.004$ (theoretical error)
ISGW (exclusive)	$0.0349 \pm 0.0015 \pm 0.0006$
HQET (exclusive)	$0.0386 \pm 0.0024 \pm 0.0012$

このようにまだ理論の不定性によるずれが大きい．現在のところ HQET によるものが最も信頼性が大きいとして，Particle Data では inclusive decay の HQET による解析も考慮し

$$|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017 \quad (3.73)$$

を採用している [2] .

u クォークは c, b クォークに比べて極端に軽いので， $b \rightarrow cl^{-}\bar{\nu}$ と $b \rightarrow ul^{-}\bar{\nu}$ のプロセスでは後者の荷電レプトンの方がより高いエネルギーを持って放出されやすい．これを利用して，inclusive semi-leptonic 崩壊で測定される荷電レプトンのエネルギースペクトラムから $|V_{ub}/V_{cb}|$ が決定できる [8]

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = 0.073 \pm 0.011 \pm 0.010$$

最初のエラーは実験誤差であり，二番目は解析に用いた理論モデルの不定性による誤差である．Particle Data による最新の値は

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = 0.08 \pm 0.02 \quad (3.74)$$

となっている [2] . このデータから $|V_{cb}| \gg |V_{ub}|$ であって，小林・益川行列の各要素間の階層性が式 (1.31) のようになっていることがわかる .

$|V_{cb}|, |V_{ub}|$ が得られれば $|V_{cd}|, |V_{ud}|$ は既に他の実験によって得られているので [2] , unitarity triangle の 2 辺の長さ， $|V_{ub}^* V_{ud}|$ と $|V_{cb}^* V_{cd}|$ は決定される .

3.5.3 $|V_{ib}^*V_{td}|$

Unitarity triangle の残る 1 辺の長さ $|V_{ib}^*V_{td}|$ は $B^0-\bar{B}^0$ 混合より得られる．図 3.1 および関連したグラフより $B^0-\bar{B}^0$ 混合の effective Hamiltonian は外線クォークと u クォークの質量を無視する近似で以下のように与えられる¹[9]．

$$\mathcal{H}^{eff} = \sum_{i,j=c,t} \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \eta_{QCD}^{ij} V_{ib}^* V_{id} V_{jb}^* V_{jd} U(x_i, x_j) (\bar{b}_L \gamma_\mu d_L)^2 + (\text{h.c.}), \quad (3.75)$$

$$U(x, y) = \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2(1-x)} - \frac{3}{4(1-x)^2} \right] \frac{xy \ln x}{(x-y)} + (x \leftrightarrow y). \quad (3.76)$$

ここで η_{QCD}^{ij} は QCD 補正である [10]． $|V_{ib}^*V_{td}|$ ($i = c, t$) の大きさが同じオーダーであることと $m_t \gg m_c$ から，トップクォークが内線に回る寄与が dominate するので

$$M_{12} = \langle B^0 | H^{eff} | \bar{B}^0 \rangle \simeq \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \eta_{QCD}^{tt} (V_{td}^* V_{tb})^2 U(x_t, x_t) \langle B^0 | (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L)^2 | \bar{B}^0 \rangle. \quad (3.77)$$

ハドロン行列要素 $\langle B^0 | \bar{d}_L \gamma_\mu b_L | \bar{B}^0 \rangle$ の値は B 中間子崩壊定数 f_B を用いて $B_B f_B^2 M_B/3$ で与えられるが，ここで現れる B_B というパラメータは強い相互作用の非摂動的効果で決定されるので正確な値は今のところ得られていない．格子 QCD その他による計算で $B_B \sim 1$ と見積もられている．式 (3.57) から

$$|V_{ib}^*V_{td}|^2 = \frac{6\pi^2 \Delta M_B}{G_F^2 M_W^2 \eta_{QCD}^{tt} U(x_t, x_t) B_B f_B^2 M_B} \quad (3.78)$$

となって， ΔM_B を実験で測れば ($B_B f_B^2$ の不定性を除いて) $|V_{ib}^*V_{td}|$ が決定される．

M_{12} の計算ができたので，ここで Γ_{12} の計算についてもふれておく．Absorptive part Γ_{12} は中間状態が on-shell の時の寄与から得られる． B 中間子の場合では図 3.4 のようなグラフの寄与から

$$\Gamma_{12} \simeq -\frac{3G_F^2 M_W^2}{8\pi} (V_{td}^* V_{tb})^2 \frac{m_b^2}{M_W^2} \langle B^0 | (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L)^2 | \bar{B}^0 \rangle, \quad (3.79)$$

を得る [11]． M_{12} の計算に現れる関数のオーダーは $U(x_t, x_t) \simeq (m_t/M_W)^2$ とできるので，これら二つ

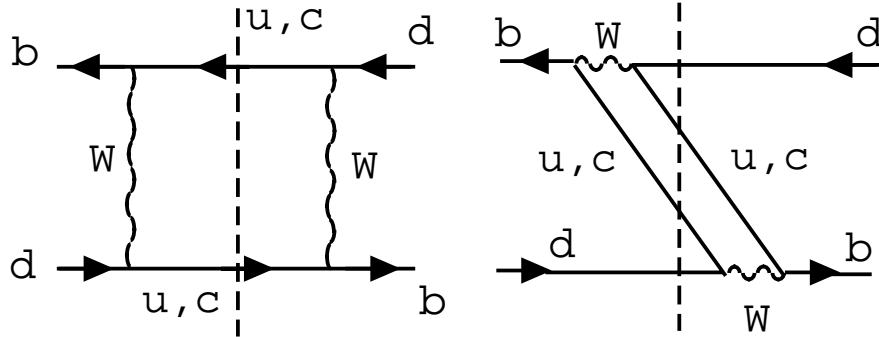


図 3.4: B 中間子混合への absorptive part の寄与．図中の点線はそこが on-shell であることを意味する．

の式を比べて次の結果を得る:

$$\left| \frac{\Gamma_{12}}{M_{12}} \right| \simeq \frac{3\pi m_b^2}{2m_t^2} \ll 1. \quad (3.80)$$

よって 3.4 節のはじめで述べた仮定が標準模型では正当化される．標準模型を超える理論においても， Γ_{12} に寄与するような新しい軽い粒子の存在は実験から否定的なので， $|\Gamma_{12}/M_{12}| \ll 1$ は正しいとみなせる．

¹この近似によるずれは B 中間子の場合，数 % 以下である．

3.5.4 ϕ_1

以下では Unitarity triangle の角度の測定法を紹介する [12] .

ϕ_1 の決定には $b \rightarrow c\bar{c}s$ の崩壊モードを用いて time dependent asymmetry を測る . このモードで現れる CP 固有状態としては $J/\Psi K_S$ ($CP -$) がある . (K_S は厳密には CP 固有状態では無いが , K 中間子系での CP の破れは微小なので無視してよい .) tree level でのファインマン図は以下ようになる :

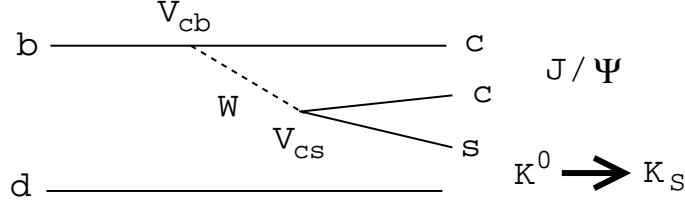


図 3.5: Tree diagram of $b \rightarrow c\bar{c}s$.

これより

$$\langle J/\Psi K^0 | B^0 \rangle = V_{cb}^* V_{cs} A_t, \quad (3.81)$$

A_t は振幅の内 , 小林・益川行列要素を除いた部分である . 一方 , ペンギン図の寄与も存在する .

このグラフからは $V_{ib}^* V_{is}$ ($i = u, c, t$) の寄与が現れるが , $\sum_i V_{ib}^* V_{is} = 0$ を用いて $V_{ub}^* V_{us}$ を消去し ,

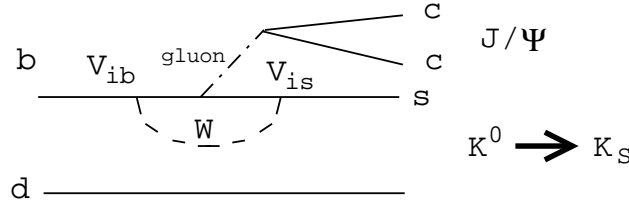


図 3.6: Penguin diagram of $b \rightarrow c\bar{c}s$.

さらに $|V_{cb}^* V_{cs}|, |V_{tb}^* V_{ts}| \gg |V_{ub}^* V_{us}|$ であるので $V_{cb}^* V_{cs} \cong -V_{tb}^* V_{ts}$ となることから , 結局振幅の CP 位相は $V_{cb}^* V_{cs}$ とよい近似で同じになる . すなわち直接的な CP の破れは無いとしてよい .

CP 固有状態の final state へ持って行くためには K^0, \bar{K}^0 の K_S 成分を抜き出す .

$$\langle J/\Psi K_S | B^0 \rangle = \langle K_S | K^0 \rangle \langle J/\Psi K^0 | B^0 \rangle = \frac{p_K^*}{\sqrt{|p_K|^2 + |q_K|^2}} V_{cb}^* V_{cs} A, \quad (3.82)$$

$$\langle J/\Psi K_S | \bar{B}^0 \rangle = \frac{q_K^*}{\sqrt{|p_K|^2 + |q_K|^2}} V_{cb} V_{cs}^* A, \quad (3.83)$$

2 番目の式の符号について注意しておく . この convention では

$$CP |X^0\rangle = -|\bar{X}^0\rangle \quad (X = K, B), \quad (3.84)$$

$$CP |J/\Psi\rangle = |J/\Psi\rangle \quad (J^{CP} = 1^{--} \text{ for } J/\Psi), \quad (3.85)$$

$$CP |J/\Psi K^0\rangle = |J/\Psi K^0\rangle \quad (L = 1) \quad (3.86)$$

である . これと $\langle X|Y\rangle$ は $\langle X|H|Y\rangle$ を略したものであることを用いて

$$\begin{aligned} \langle J/\Psi K_S | \bar{B}^0 \rangle &= -\frac{q_K^*}{\sqrt{|p_K|^2 + |q_K|^2}} \langle J/\Psi \bar{K}^0 | (CP)^{-1} CP H (CP)^{-1} CP | \bar{B}^0 \rangle \\ &= \frac{q_K^*}{\sqrt{|p_K|^2 + |q_K|^2}} \langle J/\Psi K^0 | H^{CP} | B^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.87)$$

から計算をしている。

(q_K/p_K) は K 中間子系での box 図を計算して得られる。この場合は $|V_{cd}^* V_{cs}| \gg |V_{td}^* V_{ts}|$ から、 K 中間子系での CP の破れを無視する近似で

$$\frac{q_K}{p_K} = \frac{V_{cd} V_{cs}^*}{V_{cd}^* V_{cs}} \quad (3.88)$$

となる。 B 中間子系での (q/p) は Γ_{12}/M_{12} を無視する近似で式 (3.8) と式 (3.77) から

$$\frac{q}{p} = \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{td}^* V_{tb}}. \quad (3.89)$$

これらから最終的に得られる CP asymmetry は

$$\begin{aligned} Asy[J/\Psi K_S] &= \text{Im} \left[\frac{V_{td} V_{tb}^* V_{cd}^* V_{cs} V_{cb} V_{cs}^*}{V_{td}^* V_{tb} V_{cd} V_{cs}^* V_{cb}^* V_{cs}} \right] \sin(\Delta M_B t) \\ &= \sin[2(\phi_t - \phi_c)] \sin(\Delta M_B t) \\ &= -\sin[2\{\phi_c - (\pi + \phi_t)\}] \sin(\Delta M_B t) \\ &= -\sin 2\phi_1 \sin(\Delta M_B t), \end{aligned} \quad (3.90)$$

となる。(ここで $\phi_i \equiv \arg[V_{id} V_{ib}^*]$ である。) よって実験で $J/\Psi K_S$ モードの time dependent asymmetry が測定されれば $\sin 2\phi_1$ が決定できる。しかし $\sin 2\phi = \sin 2(\pi/2 - \phi)$ なので角度 ϕ_1 が一意的に決定されるわけではない。

3.5.5 ϕ_2

ϕ_2 は $b \rightarrow u\bar{u}d$ の崩壊モードを用いて決定できる。方法は ϕ_1 の場合と同様で、この場合の CP 固有状態の崩壊モードには $\pi\pi$ (CP +) を選択する。tree level のファインマン図だけを考慮すると

$$\langle \pi\pi | B^0 \rangle = V_{ub}^* V_{ud} A, \quad \langle \pi\pi | \bar{B}^0 \rangle = -V_{ub} V_{ud}^* A, \quad (3.91)$$

となって ($\pi\pi$ が CP + の状態であるため、第 2 式の符号が ϕ_1 の場合と異っていることに注意せよ)、CP asymmetry は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} Asy[\pi\pi] &= \text{Im} \left[\frac{V_{td} V_{tb}^* (-V_{ub} V_{ud}^*)}{V_{td}^* V_{tb} V_{ub}^* V_{ud}} \right] \sin(\Delta M_B t) \\ &= -\sin[2(\phi_t - \phi_u)] \sin(\Delta M_B t) \\ &= -\sin[2\{(\phi_t + \pi) - \phi_u\}] \sin(\Delta M_B t) \\ &= -\sin 2\phi_2 \sin(\Delta M_B t). \end{aligned} \quad (3.92)$$

しかし、ペンギン図の寄与を考慮すると事情は変わってくる。 ϕ_1 の場合と異り $V_{id} V_{ib}^*$ ($i = u, c, t$) はいずれも同程度の大きさを持つのでペンギン図の寄与の CP 位相は tree graph の寄与と一般に異り、直接的な CP の破れが存在する。このため実験で $Asy[\pi\pi]$ を測定しても、そのデータをただちに ϕ_2 に結び付けることができない。上の式 (3.92) はペンギン図の寄与が無視できる場合にのみ有効である。

終状態の $\pi\pi$ のアイソスピンを区別することにより、ペンギン図の寄与をさっ引くことが可能であることが Gronau らによって示されたので (isospin analysis)[13]、原理的にはペンギン図の寄与が無視できなくても ϕ_2 を決定することが可能である。しかしそれには B^0, \bar{B}^0 それぞれの $\pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$ への崩壊を全て測定する必要があるので実験的には難しい点がある。

3.5.6 ϕ_3

3つめの角度 ϕ_3 は time dependent asymmetry では $B_s \rightarrow \rho K_S$ モードによって決定することができるが, ペンギン図の寄与による不定性の存在や B factory では $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$ or B^+B^- の生成用に加速器を設計していることから B_s を用いない測定が望まれる. そこで $B^\pm \rightarrow \{D^0, \bar{D}^0, D_{CP}\}K^\pm$ or $B^0(\bar{B}^0) \rightarrow \{D^0, \bar{D}^0, D_{CP}\}K_S$ (D_{CP} は中性 D 中間子の CP 固有状態) モードでの直接的な CP の破れから ϕ_3 を決定する方法が提唱された [14]. このモードにはペンギン図は寄与せず, すべて tree graph だけが寄与する. D^0, \bar{D}^0 への崩壊振幅は以下のように書ける:

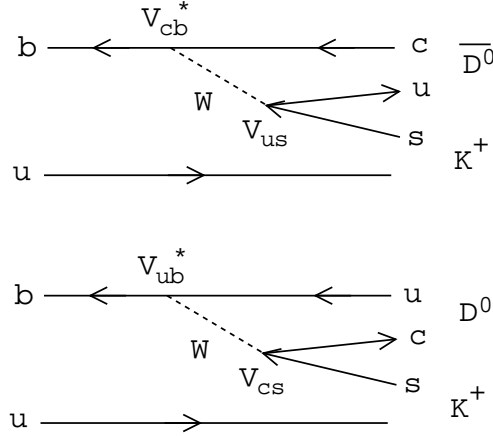


図 3.7: Contribution to $B^+ \rightarrow \{D^0, \bar{D}^0\}K^+$

$$A(B^+ \rightarrow D^0 K^+) \equiv A_D = V_{ub}^* V_{cs} a_D e^{i\delta_D}, \quad (3.93)$$

$$A(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+) \equiv A_{\bar{D}} = V_{cb}^* V_{us} a_{\bar{D}} e^{i\delta_{\bar{D}}}, \quad (3.94)$$

ここで $\delta_D, \delta_{\bar{D}}$ は phase shift である. 中性 D 中間子の CP 固有状態は $CP|D^0\rangle = -|\bar{D}^0\rangle$ の convention で

$$D_{CP} \equiv (D^0 \pm \bar{D}^0)/\sqrt{2} \quad (3.95)$$

なので,

$$\begin{aligned} \Gamma[B^+ \rightarrow D_{CP} K^+] &= \int d\Gamma \frac{|A_D|^2}{2} \left[1 + |r_D|^2 \pm 2r_D \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_{cd}^* V_{ud}}{V_{cs} V_{us}^*} \frac{V_{ub}^* V_{cs}}{|V_{ub}^* V_{cs}|} \frac{V_{cb} V_{us}^*}{|V_{cb} V_{us}^*|} e^{i\delta_s} \right\} \right], \\ &= \int d\Gamma \frac{|A_D|^2}{2} \left[1 + |r_D|^2 \pm 2r_D \cos(\phi_u - \phi_c + \delta_s) \right], \\ &= \int d\Gamma \frac{|A_D|^2}{2} \left[1 + |r_D|^2 \pm 2r_D \cos(\phi_3 - \pi + \delta_s) \right], \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$r_D = |A_{\bar{D}}/A_D|, \quad \delta_s = \delta_D - \delta_{\bar{D}}, \quad (3.97)$$

となる. ただしここでは中性 D 中間子系で CP の破れを無視する近似で

$$1 = \frac{q_D}{p_D} = \frac{V_{cd}^* V_{ud}}{V_{cd} V_{ud}^*} = -\frac{V_{cd}^* V_{ud}}{V_{cs} V_{us}^*} \quad (3.98)$$

が CP 固有状態をつくる一次結合の係数の比に一致することを用いている. 同じ計算を $B^- \rightarrow D_{CP} K^-$ について行えば \cos の argument が $(\pi - \phi_3 + \delta_s)$ となった式が得られる. よって

$$\begin{aligned} &\Gamma[B^+ \rightarrow D^0 K^+], \quad \Gamma[B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+], \quad \Gamma[B^+ \rightarrow D_{CP} K^+], \\ &\Gamma[B^- \rightarrow D^0 K^-], \quad \Gamma[B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-], \quad \Gamma[B^- \rightarrow D_{CP} K^-], \end{aligned}$$

を測定すれば ϕ_3 が決定できる.

3.5.7 K meson physics

K 中間子の物理からも図 3.2 の unitarity triangle を決定する手がかりが得られる。

K 中間子混合では中間状態が $\pi, \eta, 2\pi$ などのハドロンで構成されている場合の寄与 (long distance effects) が無視できない。このため K_L-K_S の質量や崩壊巾の差の計算をクォークレベルで行っても必ずしも正しい結果を与えない。(質量差の方は c クォークの寄与がメインであるとするとなたまたま正しいオーダーの値を与えるが、崩壊巾の差の方は B 中間子の場合と同様の計算をすると Γ_{12} と M_{12} の比が $(m_s/m_c)^2$ 程度になり、これは ΔM と $\Delta\Gamma$ が同じ位の大きさを持つという実験事実と矛盾してしまう。) しかし混合における CP の破れに関しては c, t クォークの寄与が重要となり、こちらは long distance effect が効かないのでクォークでの計算が有効である。式 (3.31) における ϵ_m の近似式を用いるとして $\text{Im}M_{12}$ を求めると

$$\text{Im}M_{12} = \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} [A^2 \lambda^6 \eta U(x_c, x_t) \eta_{ct}^{\text{QCD}} + A^4 \lambda^{10} \eta (1 - \rho) U(x_t, x_t) \eta_{tt}^{\text{QCD}}] \frac{1}{3} B_K f_K^2 M_K. \quad (3.99)$$

ただし、ここでは小林・益川行列の Wolfenstein 表示を用いている。この式と K 中間子混合での CP の破れの実験値から ρ, η に対する制限が得られ、他のパラメータが固定されたなら、その制限は (ρ, η) 平面において双曲線を与える。

K 中間子の稀崩壊からも情報が得られる。その中で $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ 崩壊は特に注目を浴びている。この崩壊は図 3.8 のようなグラフから寄与を受ける。3.3 節で $K_L \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ について触れたが、今の場合は

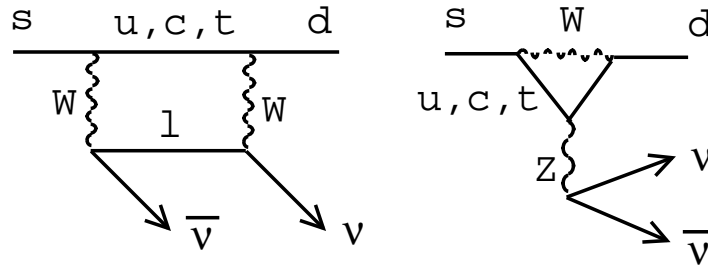


図 3.8: Contribution to $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$

電子がニュートリノに変わっている。このプロセスには弱い相互作用のみが関与しており short distance の寄与のみを考えればよい。グラフから effective Hamiltonian

$$\mathcal{H}_{\nu\bar{\nu}} = \sum_{i=u,c,t} V_{id}^* V_{is} f(m_i) (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) + (\text{h.c.}), \quad (3.100)$$

が得られる。($f(m_i)$ はループの積分やその他のパラメータを含んだ部分。) ハドロン行列要素 $\langle \pi | (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) | K \rangle$ は $K \rightarrow \pi l \nu$ の実験より精度よく得られるので、強い相互作用による不定性が無いとしてよい。 K_L の $K_{\text{even}}, K_{\text{odd}}$ 成分とも同じオーダーの崩壊振幅を与えるが、 K_{even} 成分には ϵ_m がかかっているため結果的に無視できる。よってこの崩壊は直接的な CP の破れを見ているといえる。小林・益川行列を Wolfenstein 表示であらわすと、この崩壊には imaginary part

$$\text{Im}V_{cd}^* V_{cs} = \text{Im}V_{td}^* V_{ts} = -A^2 \lambda^5 \eta \quad (3.101)$$

が効くので、この崩壊が観測されれば η の値が得られる。この崩壊の分岐比は非常に小さいので ($O(10^{-11})$) まだ観測にかかってはいないが、そう遠くない将来に結果は得られるものと期待されている。

CP の破れではないが、最近になって $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ 崩壊が観測された [15]:

$$\text{Br}[K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}] = 4.2 \frac{+9.7}{-3.5} \times 10^{-10}. \quad (3.102)$$

まだ誤差は大きい，この崩壊からは

$$|V_{cd}^* V_{cs} f(m_c) + V_{td}^* V_{ts} f(m_t)| \cong \left| \frac{f(m_c)}{A^2 \lambda^4 f(m_t)} + (1 - \rho + i\eta) \right| A^2 \lambda^5 f(m_t) \quad (3.103)$$

の情報が得られる． $\frac{f(m_c)}{A^2 \lambda^4 f(m_t)} + 1 = \rho_0$ とおけば，これから得られる制限は (ρ, η) 平面で中心を $(\rho_0, 0)$ とする円であらわされる．

3.5.8 Present statue of unitarity triangle determination

現在のところ実験で測定されているのは unitarity triangle の 3 辺の長さである．角度の決定には B 中間子系での CP の破れを測定する必要があるが，そのための実験は準備中である．今 20 世紀末には測定されるものと思われる．辺の長さの決定では，ハドロン関与する現象だけに強い相互作用の非摂動的効果の見積りの困難のためまだまだ不定性がある．今後の実験でデータの精度は益々上がっていくので，この理論的不定性を少なくしていくことが我々の課題となる．では現在の段階で，不定性を含めて unitarity triangle がどの程度決定されているかを見てみよう．小林・益川行列の式 (1.31) の表示を用いると $O(\lambda^3)$ までの近似で (今のデータの精度ではこの近似で十分である)

$$V_{ub}^* V_{ud} = A \lambda^3 (\rho + i\eta), \quad (3.104)$$

$$V_{cb}^* V_{cd} = -A \lambda^3, \quad (3.105)$$

$$V_{tb}^* V_{td} = A \lambda^3 (1 - \rho - i\eta), \quad (3.106)$$

となる．この表示では $V_{cb}^* V_{cd}$ を底辺とし， $A \lambda^3$ でスケールして複素平面上に三角形を書くと (ρ, η) が頂点になる．

$$\frac{|V_{ub}^* V_{ud}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} \cong \frac{1}{\lambda} \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = \sqrt{\rho^2 + \eta^2}, \quad (3.107)$$

$$\frac{|V_{tb}^* V_{td}|}{|V_{cb}^* V_{cd}|} \cong \frac{1}{A \lambda^3} |V_{tb}^* V_{td}| = \sqrt{(1 - \rho)^2 + \eta^2}, \quad (3.108)$$

より， $|V_{ub}/V_{cb}|$ から原点と中心とする円， $|V_{tb}^* V_{td}|$ より $(1, 0)$ を中心とする円が描け，その交点が (ρ, η) を与える．実際には誤差があるので，原点と中心とする二つの同心円にはさまれた領域と $(1, 0)$ を中心とする二つの同心円にはさまれた領域の共通領域が (ρ, η) の allowed region となる．

$\lambda = |V_{us}| = 0.22$ をとり [2]， $|V_{ub}|/|V_{cb}| = 0.08 \pm 0.02$ を採用すると

$$\sqrt{\rho^2 + \eta^2} = 0.36 \pm 0.09. \quad (3.109)$$

式 (3.78) に $\Delta M_B = 3.05 \pm 0.12 \times 10^{-10}$ (MeV.)， $\eta_{QCD}^t = 0.8$ [10]， $m_t = 173.8 \pm 5.2$ (GeV)， $B_B f_B^2 = 0.025 \pm 0.009$ (GeV²) を代入し， $|V_{cb}| = 0.0395 \pm 0.0017$ から $A = 0.82 \pm 0.04$ を採用して，

$$\sqrt{(1 - \rho)^2 + \eta^2} = 0.7 \sim 1.2. \quad (3.110)$$

この結果より得られる (ρ, η) allowed region を図 3.9 に示す．図では K 中間子系での CP の破れ (ϵ) による制限も点線で示している．見てわかるように， $|V_{tb}^* V_{td}|$ の誤差が大きい．これは $B_B f_B^2$ の見積りの誤差が大きいためである．

今後の実験で角度が決定され，それが上の範囲から大きく逸脱していると標準模型を超える新しい物理の存在を示すものとなる．ある物理が unitarity triangle の決定にどう影響するかを次節で見て行こう．

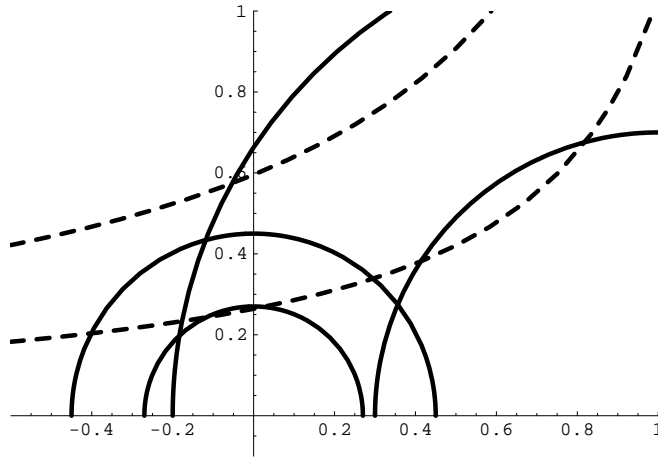


図 3.9: (ρ, η) allowed region

3.6 New physics search in B physics

実験で測定されたデータから unitarity triangle を決定する際には、まず標準模型を仮定して各辺の長さ
と角度を求める。実験には誤差がつきものであるので、得られた値の範囲は小林・益川行列の Wolfenstein
表示 (1.31) でのパラメータである (ρ, η) 平面上に図示される。辺の長さからは図 (3.9) のような allowed
region が得られ、角度からは次の図のような allowed region が得られる：

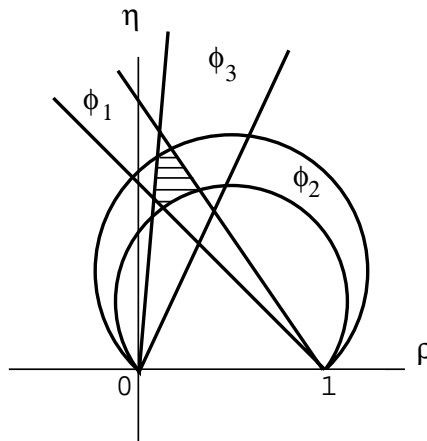


図 3.10: Allowed region by angles

ここで ϕ_2 の allowed region について説明しておく。Unitarity triangle は (ρ, η) 平面では原点と点
(1, 0) を結ぶ線分を底辺とする三角形になる。 ϕ_2 は底辺に向かい合う角であり、それが一定となる軌跡
は、円周角の性質から底辺を弦とする円弧を描く。よって ϕ_2 の allowed region は底辺を弦とする二つ
の円弧に挟まれた領域として与えられる。

図 (3.9) と (3.10) を組み合わせて、各辺、各角度の値の allowed region 全てに共通する領域が存在す
ればデータは標準模型と consistent になり、unitarity triangle が決定される。もしもそのような共通領
域が無い場合はどこかに新しい物理の影響が現れているはずである。ずれの原因を調査することにより、
新しい物理の姿を予想できる。

例えば、角度の和は 180 度になるが辺の長さのデータが図 (3.12) のようになる場合は charged Higgs
や super particles のように $B^0-\overline{B}^0$ 混合のみに寄与する物理が考えられる。なぜなら新しい物理が

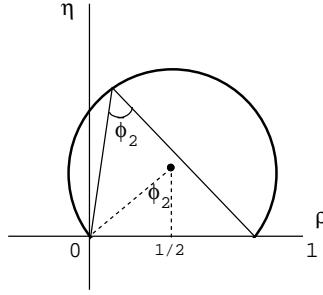


図 3.11: Orbit of $\phi_2 = \text{constant}$.

$B^0-\overline{B^0}$ 混合にのみ寄与する場合, $\arg M_{12} \equiv \phi_M$ とすると各角度は

$$\phi_1 = \phi_M/2 + \phi_c \pmod{180^\circ}, \quad (3.111)$$

$$\phi_2 = -\phi_M/2 - \phi_u \pmod{180^\circ}, \quad (3.112)$$

$$\phi_3 = 180^\circ + \phi_u - \phi_c. \quad (3.113)$$

で与えられ, 3つの和は ϕ_M の値によらず 180 度になるからである.

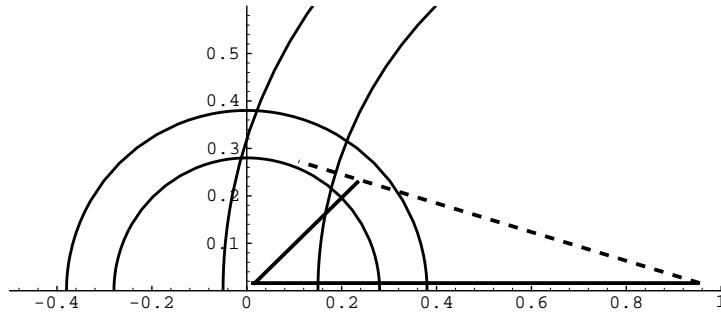


図 3.12: Broken unitarity triangle by wrong $|V_{tb}^*V_{td}|$

逆に角度の和が 180 度にならない場合は $B^0-\overline{B^0}$ 混合以外への寄与が考えられるので, tree level やペンギン図で b-decay に寄与する新しい物理が予想される.

演習問題

1. $|p/q| = 1$ は $\text{Im}(\Gamma_{12}/M_{12}) = 0$ と等価であることを示せ .
2. 式 (3.20) を示せ .
3. 全角運動量 0 の粒子が崩壊して $\pi^0\gamma$ になるとき , 終状態の CP は + であることを示せ .
4. 式 (3.59) を示せ .
5. 式 (3.65) を示せ .
6. ペンギン図の寄与を無視する時 , $B_s \rightarrow \rho K_S$ 崩壊の time dependent asymmetry で ϕ_3 が得られることを示せ .
7. unitarity triangle の 3 つの角度を測定して , その和が 180 度にならないような新しい物理の例を示せ .

関連図書

- [1] J.H.Christenson, J.W.Cronin, V.L.Fitch and R.Turlay, Phys.Rev.Lett. **13**, 138 (1964).
- [2] C.Caso et.al. (Particle Data Group), European Physical Journal **C3**, 1 (1998).
- [3] L.M. Sehgal, Phys.Rev. **D38**, 808 (1988).
T. Morozumi and H. Iwasaki, KEK preprint KEK-TH-206 (1988).
J.M. Flynn and L. Randall, Phys.Lett. **216B**, 221 (1989).
J.M. Flynn, preprint RAL-89-066 (1989).
- [4] P. Herczeg, Phys.Rev. **D27**, 1512 (1983).
D. Chang and R.N. Mohapatra, Phys.Rev. **D30**, 2005 (1984).
T. Kurimoto, Phys.Lett. **172B**, 357 (1986).
- [5] G. Altareli, N. Cabibbo, G. Corbo, L. Mainai, Nucl. Phys. **B207**, 365 (1982).
- [6] N. Isgur, D. Score, B. Grinstein, M.B. Wise, Phys. Rev. **D39**, 397 (1989).
- [7] For a review see, M. Neubert, Phys. Rep. **245**, 259 (1994).
- [8] B 中間子物理の実験的側面については良い review がある :
T.E. Browder, K. Honscheid and D. Pedrini, Ann. Rev. Nucl. Sci. **46**, 395 (1995).
- [9] T. Inami and C.S. Lim, Prog. Theor. Phys. **65** 297; 1722(E) (1981);
J.S. Hagelin, Nucl. Phys. B193, 123 (1981).
- [10] F.J. Gilman and M.B. Wise, Phys. Rev. **D27**, 1128 (1983);
A.J. Buras, M. Jamin and P.H. Weisz, Nucl. Phys. **B347**, 491 (1990).
- [11] J.S. hagelin, Nulc. Phys. **B193**, 123, (1981).
- [12] A.B. Carter and A.I. Sanda, Phys. Rev. Lett. **45**, 952 (1980), Phys. Rev. **D23**, 1567 (1981);
I.I. Bigi and A.I. Sanda, Nucl. Phys. **B193**, 85 (1981), Nucl. Phys. **B281**, 41 (1987).
- [13] M. Gronau and D. London, Phys. Rev. Lett. **65**, 3381 (1990);
H.J. Lipkin, Y. Nir, H.R. Quinn and A.E. Snyder, Phys. Rev. **D44**, 1454 (1991).
- [14] M. Gronau and D. London, Phys. Lett. **B253**, 483 (1991);
M. Gronau and D. Wyler, Phys. Lett. **B265**, 172 (1991);
I. Dunietz, Phys. Lett. **B270**, 75 (1991).
- [15] E787 Collaborations, S. Adler et.al. Phys. Rev. Rett. **79**, 2204 (1997).